

Robin

**Institut Non Linéaire de Nice
Laboratoire Onde et Désordre**

**Instabilités dynamiques dans un nuage d'atomes
froids**

Michaud Franck

Juillet-Septembre 2004

*Stage de seconde année à l'Ecole Nationale Supérieure de Physique de Marseille.
Le stage s'est déroulé sous la tutelle de Guillaume Labeyrie. Je remercie en particulier
Robin Kaiser et toute l'équipe du Laboratoire Onde et Désordre pour leur sympathie.*

Table des matières

0 Introduction.	5
I Généralités.	
1 Le Piège Magnéto Optique du laboratoire.	6
2 Présentation des instabilités.	8
II Cadre théorique du piégeage d'atome froid.	10
1 Couplage atome-laser.	
1.1 Modèle de l'électron élastiquement lié.....	10
1.2 Force sur l'atome.....	11
1.3 Effet Doppler et effet Zeeman.....	12
2 Piège Magnéto Optique.	14
2.1 Modèle simple : MOT à 1 atome.	
2.1.1 Force moyenne.....	14
2.1.2 Fluctuation autour de la force moyenne.....	16
2.2 MOT à grand nombre d'atome.	
2.2.1 Effet d'écrantage.....	18
2.2.2 Diffusion Multiple de la lumière.....	19
III Modèle numérique	22
1 Le programme.	22
1.1 Détermination des grandeurs du programme.....	22
1.1.1 Conversion des unités.....	23
1.1.2 Simulation de l'écrantage.....	24
1.1.3 Algorithme de calcul de la force de pression de radiation.....	25
1.2 Simulation du bruit de diffusion.....	25
1.3 Simulation de la diffusion multiple.....	25
2 Test du modèle Doppler.	26
2.1 Test du refroidissement par laser, détermination de γ	26
2.2 Détermination de la pulsation critique de l'oscillateur amorti.....	27
2.3 Coefficient de diffusion et vérification de la loi de température.....	29
2.4 Compression du nuage en fonction de l'épaisseur optique.....	31
3 Recherche des instabilités	32

IV Etude expérimentale des instabilités	34
1 Présentation des axes de recherche.	34
2 Techniques de mesure.	
2.1 Fluorescence du nuage.....	34
2.2 Transmission du nuage.....	35
2.3 Caméra refroidie.....	35
3 Caractérisation de la nature des instabilités.	
3.1 Caractérisation des oscillations : nature spectrale.....	36
3.2 Seuil d'oscillation.....	37
3.3 Comparaison oscillation forcée et oscillation naturelle.....	38
4 Cartographie du seuil d'oscillation.	
4.1 Méthode de détermination du seuil.....	41
4.2 Evolution du seuil en fonction du désaccord et du champ B.....	42
4.3 Evolution des paramètres caractéristique du MOT sur la courbe du seuil.	
4.3.1 Fluctuation du nombre d'atomes.....	42
4.3.2 Taille du nuage.....	45
4.3.3 Evolution de l'épaisseur optique au seuil.....	45
5 Recherche d'un modèle non linéaire pour les instabilités.	48
5.1 Présentation des systèmes dynamiques non linéaire.....	48
5.2 Orientation vers un modèle.	
5.2.1 Hytérésis.....	50
5.2.2 Amplitude et fréquence des oscillations.....	52
5.2.3 Accrochage en fréquence.....	53
5.2.4 Résumé.....	55
 V Conclusion	 56

0 Introduction

Le Laboratoire Onde et Désordre (LOD) est rattaché à l'Institut Non Linéaire de Nice (INLN). Il est spécialisé dans l'étude des gaz d'atomes froids avec pour thématique les phénomènes de diffusion de la lumière dans ces milieux.

L'expérience à laquelle j'ai participé porte sur un Piège Magnéto Optique (Magneto Optical Trap ou MOT), à base d'atome de Rubidium. La particularité de ce piège est qu'il permet le piégeage d'un grand nombre d'atomes : jusqu'à 10^{10} . On a ainsi accès à l'étude d'une physique mésoscopique qui a pour but d'établir un pont entre la physique microscopique et notre monde macroscopique.

La physique des MOT classiques est maintenant bien connue : les atomes sont confinés en vitesses et en position par des faisceaux laser et un champ magnétique, qui créent une force de compression. Pourtant il existe une seconde force, de répulsion, dont la cause est la diffusion de la lumière. Il s'agit d'une manifestation mécanique de la diffusion multiple, qui s'inscrit dans la thématique du laboratoire.

Cette force est généralement négligée dans la plupart des MOT car elle est très faible quand on a un faible nombre d'atomes. Par contre, ici sur l'expérience sur les atomes de Rubidium, le nombre d'atomes piégés est assez grand pour qu'elle ne devienne plus négligeable.

On montrera même que dans certaine condition, la diffusion multiple devient prépondérante, et on se trouve face à un cas où le nuage d'atome peut développer des instabilités, et présente les aspects d'une dynamique non linéaire encore inconnue.

C'est sur cette thématique que repose mon stage, c'est-à-dire sur les instabilités dynamiques dans un nuage d'atomes froid. L'étude d'un tel phénomène est particulièrement intéressant car d'autres domaines telle que l'astrophysique ou la physique des plasmas présentent les mêmes singularités : on peut citer la compétition entre les forces de gravité et pression de radiation dans les étoiles créant les instabilités qu'étudient les astronomes (céphéïdes) ; ou encore les disruptions dans les plasmas, encore mal connues, mais dont une meilleure compréhension permettrait sous doute un plus rapide développement des réacteurs à fusion thermonucléaire.

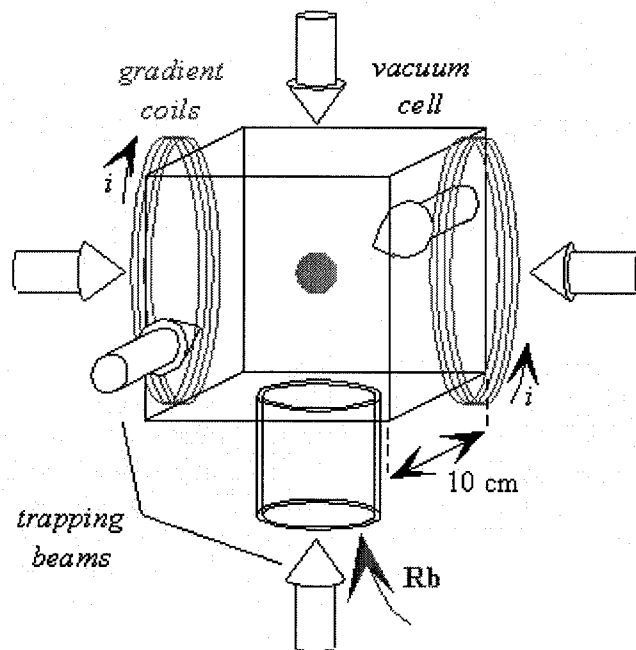
L'avantage que présente l'expérience est d'être accessible, avec des paramètres facilement ajustables, comparés aux plasmas ou aux étoiles... Les modèles physiques de ces phénomènes étant assez proches, on peut ainsi envisager qu'avec une bonne compréhension des instabilités dans un nuage d'atomes froid, on aurait des bases satisfaisantes pour simuler et comprendre d'autres domaines de la physique.

I Généralités.

1 Le Piège Magneto Optique du laboratoire.

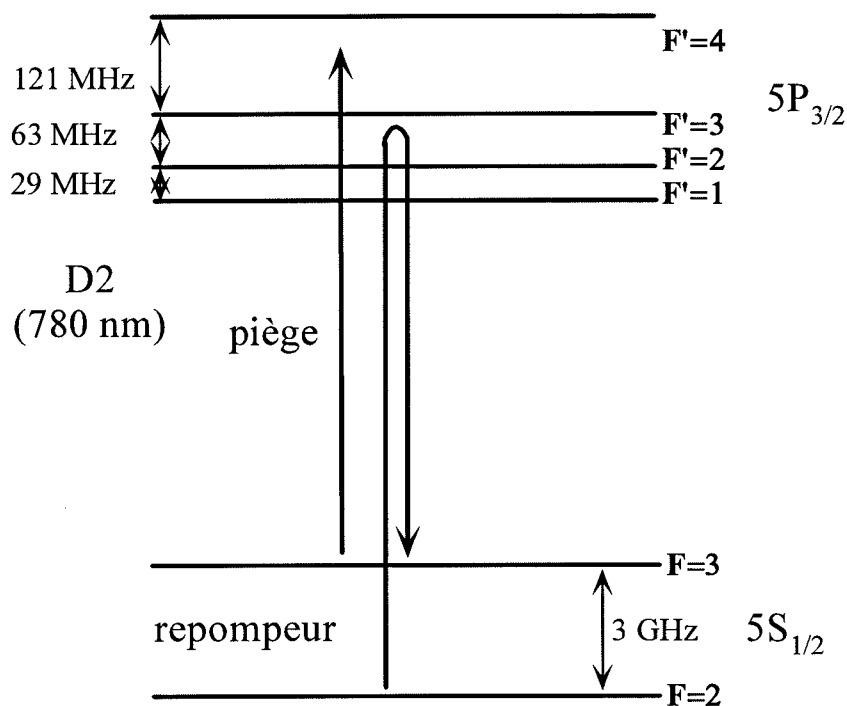
Dans cette partie, on va décrire les principaux éléments composant le piège magnéto optique du laboratoire.

- La cellule contient le gaz de rubidium sous faible pression (environ 10^{-7} mbar). Elle est entourée d'une paire de bobines parcourues par des courants de sens opposé, qui créent un gradient de champ magnétique. Elle est éclairée par 6 faisceaux laser contrapropageants deux à deux, venant des 3 directions de l'espace de la manière suivante :



- Les faisceaux pièges sont fabriqués à partir d'un seul et même faisceau sortant d'un MOPA (Master Oscillator Power Amplifier) qui délivre un faisceau initial d'une puissance d'environ 200 mW. Celui-ci amplifie la lumière issue d'une diode laser « maître », de faible largeur spectrale (environ 1 MHz) et de longueur d'onde 780 nm.

En effet, on a le spectre d'absorption du rubidium :



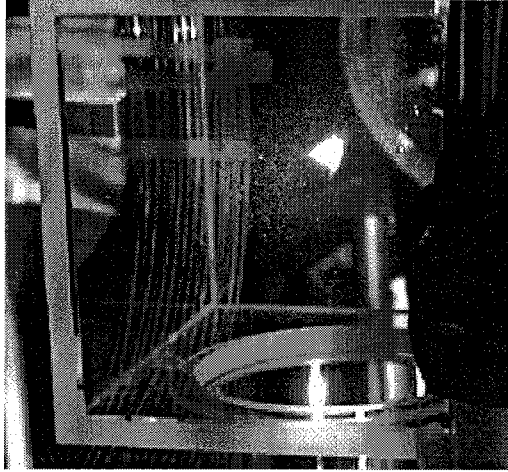
La transition excitée pour piéger les atomes est $F=3 \rightarrow F'=4$. Par contre il existe une certaine probabilité que l'on ait excité $F=3 \rightarrow F'=3$ et donc en se désexcitant on peut tomber sur le niveau $F=2$. Les atomes se trouvant dans ce niveau d'énergie ne peuvent plus être excités par le laser piège et sont perdus... A terme on perd tous les atomes.

D'où le rôle important d'un autre laser appelé laser « repompeur » qui excite la transition $F=2 \rightarrow F=3$ pour récupérer les atomes perdus. Ce laser éclaire directement la cellule.

- Il existe également un faisceau fabriqué avant la répartition d'intensité des faisceaux pièges, que l'on appelle « sonde ». Ce faisceau sonde sert à faire des mesures de transmission à travers le nuage.

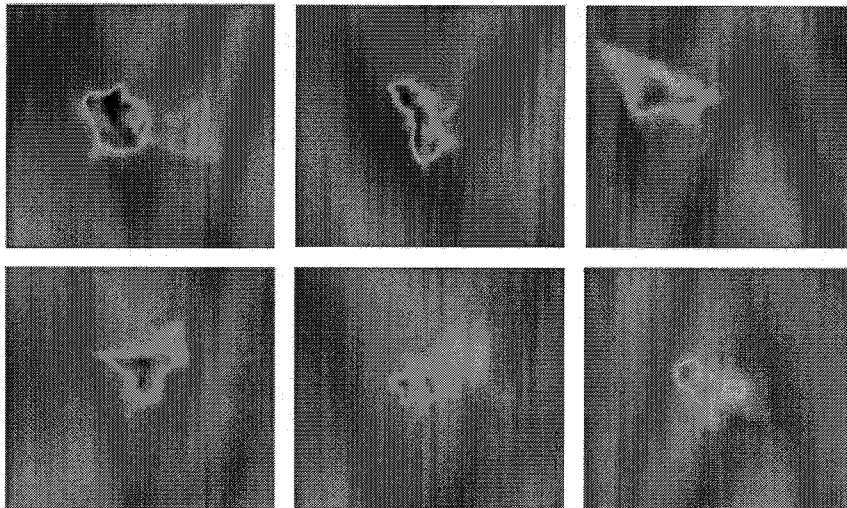
2 Présentation des instabilités.

Dans les conditions normales d'utilisation du piège, le nuage à un profil quasi gaussien et sa position est stable. Sa taille typique est de l'ordre de 5 mm. Comme on voit sur la photo suivante, le nuage diffuse la lumière des faisceaux pièges :



(taille de la cellule : 10 cm)

Si par contre on fait varier la fréquence du laser de telle sorte de se rapprocher de la valeur de la transition atomique, le nuage va devenir instable et se mettre à osciller spontanément. On le voit nettement sur le schéma suivant où on a pris des images permettant de suivre l'évolution temporelle de la forme du nuage :



Il n'y a pas actuellement de théorie quantitative expliquant ce phénomène. On pense cependant que cette instabilité trouve son origine dans la compétition entre 2 forces : la force de pression de radiation des lasers qui sert à piéger les atomes, et une force de répulsion conséquence de la diffusion multiple de la lumière.

L'objectif de mon stage a pour but d'améliorer la compréhension de ce phénomène inédit.

ANNEXE :

Je rapporte ici les valeurs des courants dans les diodes laser, nécessaire à connaître pour allumer l'expérience. Je joins également le schéma du MOT où on pourra recenser les éléments décrits dans la partie 1. Par contre, ce schéma n'illustre pas la véritable complexité du montage réel...

Valeur des courants :

Maître piège : $I_I = 57$ mA et $I_\lambda = 31$ mA.

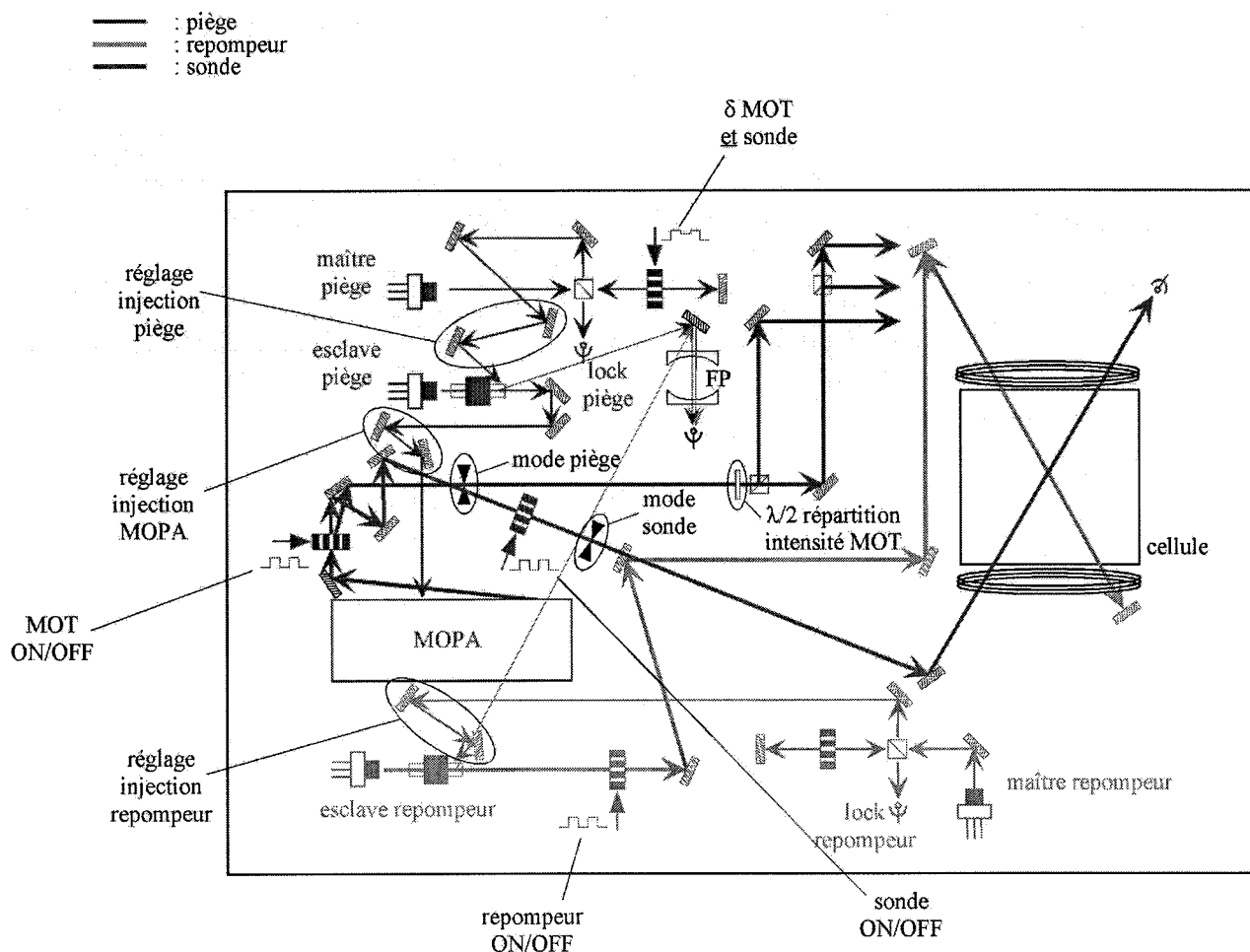
Maître repompeur : $I_I = 57$ mA et $I_\lambda = 37$ mA.

Esclave piège : $I_I = 82$ mA.

Esclave repompeur : $I_I = 92,5$ mA.

MOPA : $I = 1,87$ A.

Schéma du piège :



II Cadre théorique du piégeage d'atomes froids.

1 Couplage atome-laser.

Le calcul qui va suivre repose sur une théorie semi-classique mais donne des résultats satisfaisant et est suffisant pour introduire toutes les notions présentes dans la simulation numérique.

On va décrire le mouvement du centre de masse d'un atome éclairé par une onde laser. La force d'une onde lumineuse sur la matière est appelée force radiative : elle dépend principalement du désaccord δ qui est la différence entre la fréquence de l'onde laser ω_L et la fréquence propre de l'atome ω_{at} , et de l'intensité lumineuse.

1.1 Modèle de l'électron élastiquement lié.

On va ici poser les bases par une approche non quantique, de l'absorption de l'énergie d'une source lumineuse par le couple noyau-électron.

Soit \vec{r} la position de l'électron par rapport au noyau atomique que l'on suppose fixe. On peut montrer que sa position est régie par l'équation d'un oscillateur harmonique amorti.

L'équation régissant la position de l'électron par rapport au noyau de l'atome est la suivante :

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \Gamma \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \omega_{at}^2 \vec{r} = \frac{\vec{f}_{ext}}{m_e}$$

Lorsque l'on éclaire l'atome avec un laser, la force totale qui agit sur l'électron est essentiellement due au champ électrique car on montre que la composante du champ magnétique est négligeable si la vitesse de l'électron est petite devant celle de la lumière.

On prend une onde monochromatique polarisée linéairement :

$$\vec{f}_{ext} = \vec{f}_E = q \cdot \vec{E}_0 \cdot e^{-i\omega_L t}$$

On cherche alors une solution du type $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 \cdot e^{-i\omega_L t}$. On suppose pour la suite que l'on se place dans l'approximation dipolaire, c'est-à-dire que les variations de position de l'électron sont petites devant la longueur d'onde du laser.

L'équation devient :

$$-\omega_L^2 \vec{r}_0 - i\omega_L \Gamma \vec{r}_0 + \omega_{at}^2 \vec{r}_0 = \frac{q \vec{E}_0}{m_e}$$

Soit α la polarisabilité de l'atome défini par $q\vec{r} = \epsilon_0 \cdot \alpha \cdot \vec{E}$, en décomposant α en partie réelle et imaginaire $\alpha = \alpha' + i\alpha''$, on trouve :

$$\alpha' = \frac{\omega_{at}^2 - \omega_L^2}{(\omega_{at}^2 - \omega_L^2)^2 + (\omega_L \Gamma)^2} \frac{q^2}{\epsilon_0 m_e}$$

et

$$\alpha'' = \frac{\omega_L \Gamma}{(\omega_{at}^2 - \omega_L^2)^2 + (\omega_L \Gamma)^2} \frac{q^2}{\epsilon_0 m_e}$$

En introduisant de désaccord $\delta = \omega_L - \omega_{at}$ et en supposant que l'on se trouve près de la résonance ($\delta \ll \omega_L$), on a :

$$\alpha' = \frac{-\delta\omega_L}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \frac{\alpha_0}{2} \quad \text{et} \quad \alpha'' = \frac{\frac{\Gamma}{2}\omega_L}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \frac{\alpha_0}{2}$$

avec $\alpha_0 = \frac{q^2}{\epsilon_0 m_e \omega_L}$.

On va voir par la suite que des forces différentes sont associées aux parties réelle et imaginaire de la polarisabilité.

1.2 Force sur l'atome

On considère une onde plane se propageant sur l'axe Oz, à chaque absorption d'un photon l'atome subit une quantité de mouvement $\Delta \vec{p} = \hbar \vec{k} \cdot \vec{e}_z$.

Au contraire, lorsque l'atome émet un photon au cours de son cycle de fluorescence, l'émission se fait de manière aléatoire, donc le transfert d'impulsion est nul. Au final, on obtient donc une force moyenne dirigée suivant la direction de propagation de l'onde.

On montre qu'en valeur moyenne la force totale exercée sur l'atome due au champ électromagnétique a pour expression :

$$\langle \vec{f} \rangle = \epsilon_0 \left(\frac{1}{4} \alpha' \cdot \text{grad} [|E_0|^2] + \frac{1}{2} \alpha'' k \cdot \vec{e}_z |E_0|^2 \right)$$

Le terme $\frac{1}{2} \epsilon_0 \alpha'' k \cdot \vec{e}_z |E_0|^2$ est appelé pression de radiation résonnante \vec{f}_{rad} . On peut le mettre sous la forme :

$$\vec{f}_{rad} = \hbar \vec{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{s+1}$$

- $\hbar \vec{k}$ est le transfert d'impulsion moyen par cycle de fluorescence et $\frac{\Gamma}{2} \frac{s}{s+1}$ représente le taux des cycles de fluorescence.
- s est appelé paramètre de saturation, il vaut :

$$s = \frac{I_{inc} / I_{sat}}{1 + 4 \frac{\delta^2}{\Gamma^2}}$$

en posant $I_{sat} = \frac{\Gamma^2 \hbar c}{2 \alpha_0 \omega_L}$

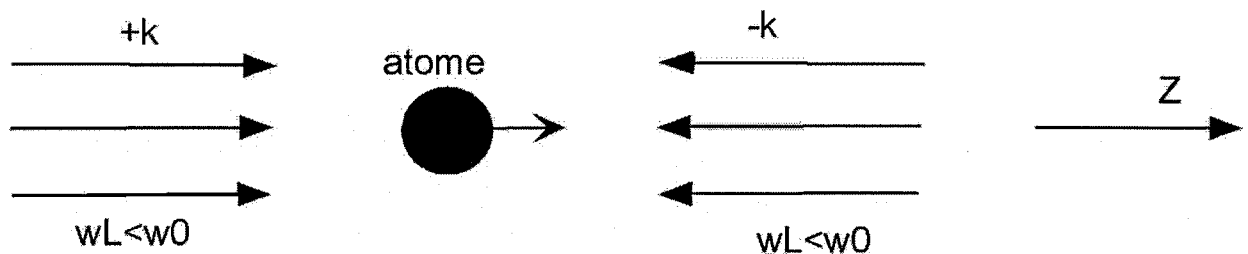
Quant à l'autre terme il s'agit de la force dipolaire. Cette force, proportionnelle au gradient d'intensité lumineuse, ne joue pas un rôle dominant dans le MOT.

1.3 Effet Doppler et effet Zeeman

Jusqu'à maintenant on a considéré un atome au repos soumis à une force de pression de radiation. Par contre si il se déplace à la vitesse \vec{v} , il verra dans son référentiel une fréquence laser décalée par effet Doppler $\omega' = \omega_L - \vec{k} \cdot \vec{v}$. Ainsi pour que l'atome puisse être excité de manière résonnante, il faut que l'on ait :

$$\omega_{at} = \omega_L - \vec{k} \cdot \vec{v}$$

Considérons maintenant 2 faisceaux contapropageant :



Si l'atome a une vitesse v_z non nulle, l'onde $-k$ se rapproche de la résonance par effet Doppler tandis que l'onde $+k$ s'en éloigne. Ainsi la force de pression de radiation liée à l'onde $-k$ prédomine, ce qui ralentit l'atome (même raisonnement si l'atome se déplace dans la direction opposée). Si on place 3 paires d'ondes planes de ce type dans les 3 directions, la vitesse de l'atome est réduite quelque soit sa direction.

Par contre pour une fréquence de laser donnée, seule une classe de vitesse d'atomes interagit efficacement avec le laser. On doit accorder la fréquence du laser en dessous (ou « vers le rouge ») de la fréquence atomique.

L'effet Zeeman correspond au déplacement des niveaux d'énergie atomique en présence d'un champ magnétique. Le champ magnétique est utilisé pour faire varier la fréquence associée à une transition optique. Pour la transition du Rubidium utilisée, la variation sur le nombre quantique magnétique « m » est ± 1 , on note le désaccord Zeeman :

$$\delta_z = \mu \cdot B_z$$

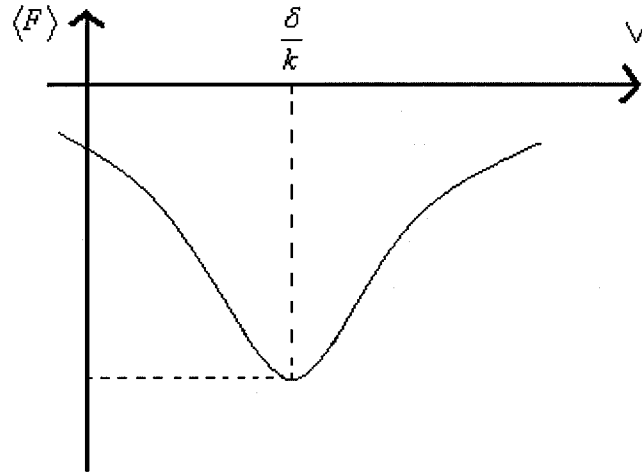
avec $\frac{\mu}{2\pi} = 1,4 \text{ MHz} \cdot \text{G}^{-1}$

Si on applique suivant un axe un gradient de champ magnétique, on provoque un déplacement des sous niveaux Zeeman dépendant linéairement de la position sur l'axe.

En combinant ces deux effets, on obtient une nouvelle valeur du désaccord et l'expression de la force de radiation devient :

$$\vec{f}_{rad}(\vec{v}) = \hbar \vec{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{I_{inc} / I_{sat}}{1 + 4 \frac{(\delta_L - \delta_D + \delta_Z)^2}{\Gamma^2} + \frac{I_{inc}}{I_{sat}}}$$

Pour $z=0$, l'intensité de la force a l'allure suivante :



C'est une Lorentzienne. La force est maximale lorsque l'onde est à résonance avec les atomes. Elle est négative pour les atomes de vitesse $v_z > 0$, c'est pourquoi les atomes se propageant en sens opposés à l'onde laser sont ralentis.

2 Piège Magnéto-Optique (MOT).

On va premièrement présenter le modèle simple d'un MOT à 1 seul atome. On verra que l'on peut linéariser la force de radiation et faire apparaître deux forces :

- une force de friction.
- une force de rappel.

Il faudra également tenir compte des fluctuations autour de la force de radiation dues à l'émission spontanée de photons par les atomes du MOT.

Ensuite on verra les corrections à apporter pour un MOT à grand nombre d'atomes. Notamment il faut prendre en compte le fait que :

- Les atomes ne voient pas tous la même intensité des lasers (effet d'écrantage).
- les photons diffusés sont réabsorbés par d'autres atomes (diffusion multiple) ce qui provoque une force répulsive qui contrebalance la force de pression de radiation.

2.1 Modèle simple : MOT à 1 atome.

2.1.1 Force moyenne

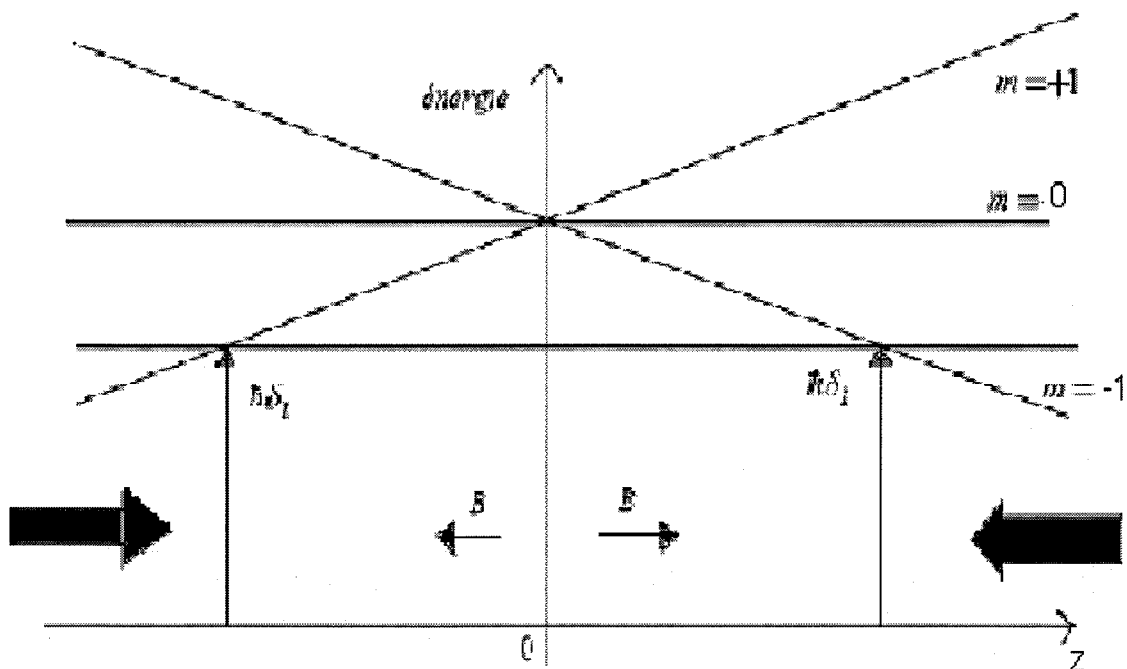
On suppose un d'atome éclairé par 2 ondes laser contrapropageantes légèrement désaccordées vers le rouge et on applique un gradient de champ magnétique suivant Oz. La force totale exercée sur l'atome est la différence des deux forces de pression de radiation :

$$\vec{F} = \hbar k \frac{\Gamma}{2} \left(\frac{s_+}{s_+ + 1} - \frac{s_-}{s_- + 1} \right) \vec{u}_z$$

ou encore écrite autrement comme on la trouvera dans le modèle numérique :

$$\vec{F} = \hbar k \frac{\Gamma}{2} \frac{I}{I_{sat}} \left(\frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\delta_L}{\Gamma} - \frac{k}{\Gamma} v_z - \frac{\mu}{\Gamma} \nabla B_z \right)^2} + \frac{I}{I_{sat}}} - \frac{1}{1 + 4 \left(\frac{\delta_L}{\Gamma} + \frac{k}{\Gamma} v_z + \frac{\mu}{\Gamma} \nabla B_z \right)^2} + \frac{I}{I_{sat}} \right) \vec{u}_z$$

Pour les atomes étant dans la plage de capture, c'est-à-dire ceux qui ont une vitesse autour de $k\Delta v_{cap} \approx \delta$, leur vitesse va être rapidement amortie et va tendre vers 0. Les atomes ainsi piégés vont devenir « froid ». De même, on a également un piégeage sur la position en formant un champ magnétique tel que $\nabla B_z \propto z$.



(Schéma caractéristique d'un MOT à 1D)

Lorsque les désaccords Doppler et Zeeman sont petits devant δ_L on peut faire un développement limité sur le dénominateur de la pression de radiation et on a :

$$\vec{F} = -\gamma \cdot \vec{v} - \kappa \cdot \vec{r}$$

pour $\delta < 0$ on obtient une force de friction :

$$f_z = -\gamma \cdot M \cdot v_z$$

avec

$$\gamma = -8 \cdot \frac{\hbar k^2}{M} \cdot \frac{|\delta_L|}{\Gamma} \cdot \frac{I}{I_{sat}} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{2\delta_L}{\Gamma}\right)^2\right)^2}$$

On remarque que $\gamma_{max} = \frac{9}{4\sqrt{3}} \frac{\hbar k^2}{M} \frac{I_{inc}}{I_{sat}}$ pour $\delta = \frac{\Gamma}{2\sqrt{3}}$.

L'ordre de grandeur de γ^{-1} est la dizaine de micro seconde, l'amortissement des vitesses est donc un processus rapide.

Le second terme est une force de rappel :

$$f_R = -\kappa.M.z$$

avec

$$\kappa = -8 \frac{\hbar k^2}{M} \cdot \frac{|\delta_L|}{\Gamma} \mu \cdot \nabla B \cdot \frac{I}{I_{sat}} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{2\delta_L}{\Gamma}\right)^2\right)^2}$$

κ est de l'ordre de 10^5 s^{-2} .

Rq : on a donc l'équation sur la position $\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = -\gamma \cdot \vec{v} - \kappa \cdot \vec{r}$, qui est l'équation d'un oscillateur harmonique amorti...

2.1.2 Fluctuation autour de la force moyenne.

A chaque cycle de fluorescence (environ 10^{-7} seconde) des photons sont émis spontanément de manière aléatoire. On a alors une fluctuation autour de la force moyenne et on va quantifier ces fluctuations par une diffusion qui provoque un chauffage, s'opposant au refroidissement. On induit une marche au hasard sur la quantité de mouvement suivant l'équation :

$$\frac{\partial (\Delta p)_{ii}^2}{\partial t} = 2D_{ii} \quad (i=x,y,z)$$

avec D le tenseur de diffusion qui vaut :

$$D = \frac{\Gamma}{2} \cdot s \cdot \hbar^2 k^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\Gamma}{2} \cdot s \cdot \hbar^2 k^2 \cdot \begin{bmatrix} \overline{\cos^2 \vartheta} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{\sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi} \end{bmatrix}$$

et $s = \frac{\Gamma^2/4}{\delta_{total}^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$

Le premier terme du tenseur de diffusion représente la contribution des fluctuations entre les photons absorbés venant de la droite et de la gauche, ce qui a un effet uniquement selon la direction des faisceaux lasers.

Le second terme est dû au recul aléatoire lors de l'émission spontanée. Les angles correspondent aux angles polaires du photon émis.

On montre que dans une mélasse à 1 dimension l'énergie cinétique est constante et égale à :

$$E_{CZ} = \frac{D_{ZZ}}{2M\gamma}$$

L'énergie cinétique, et donc la température, est déterminée par le rapport entre le coefficient de diffusion et de friction.

On a donc d'après le théorème d'équipartition de l'énergie :

$$k_B T_z = \frac{D_{zz}}{M\gamma} = -\hbar\Gamma \frac{1 + \overline{\cos^2\theta}}{8} \left(\frac{2\delta}{\Gamma} + \frac{\Gamma}{2\delta} \right)$$

Rq : A 3 dimension il faut prendre $D_{zz} + D_{xx} + D_{yy}$ et pour une émission isotrope les moyennes angulaires valent 1/3.

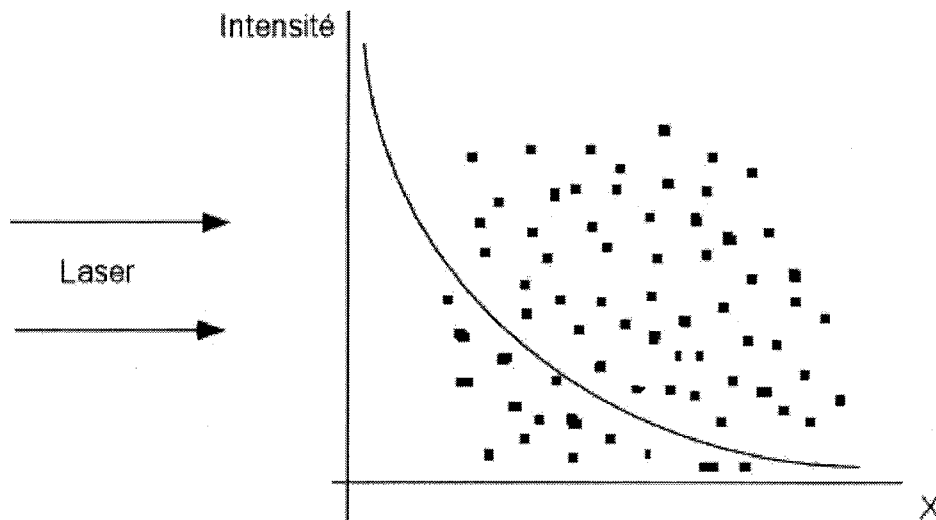
$$k_B T_{\min} = \frac{\hbar\Gamma}{2}$$

La température minimale que l'on peut atteindre par effet Doppler est de l'ordre de 142 μK pour des atomes de Rubidium.

2.2 MOT à grand nombre d'atomes.

2.2.1 Effet d'écrantage

Lorsque l'on a un grand nombre d'atomes, on doit tenir compte de l'atténuation de l'intensité des lasers traversant le nuage. Un atome au bord du nuage verra une intensité plus grande que si il était au centre.



Cela se traduit par la loi de Beer-Lambert :

$$I(x, y, z) = I_{inc}(x, y, z).e^{-b}$$

b étant l'épaisseur optique du nuage dans le référentiel de l'atome à la position (x, y, z) .

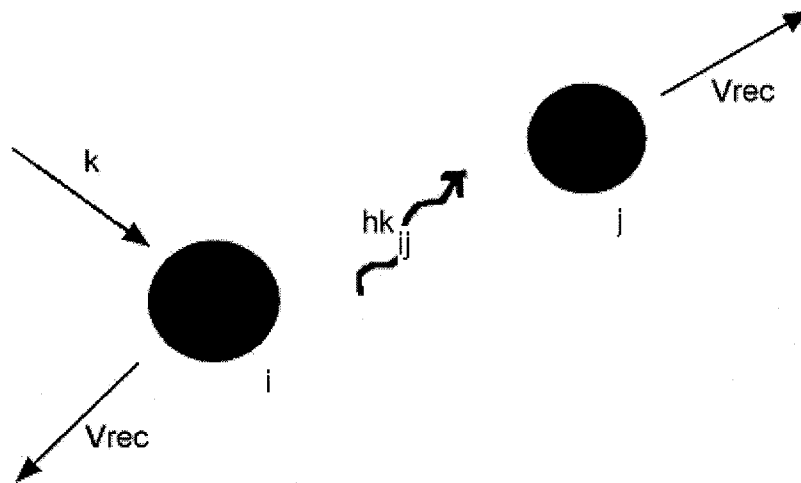
$$b = \int \sigma.n(x, y, z).dx.dy.dz$$

avec $\sigma = \frac{3\lambda^2}{2\pi} \frac{1}{1 + 4\frac{\delta^2}{\Gamma^2}}$

La force de pression de radiation sur les atomes des bords du nuage est plus grande que sur ceux au centre. Cette différence s'accroît à mesure que l'épaisseur optique grandit.

2.5 Diffusion multiple de la lumière

Elle est à l'origine d'une force qui s'oppose au piégeage des atomes. Alors que la diffusion simple d'un photon par un atome provoque une fluctuation autour de la force moyenne, la diffusion double (un atome absorbe un photon émis par un autre atome du nuage) crée une force de répulsion.



L'étude de la diffusion multiple montre que cette force est de type coulombienne. Elle est déterminante on suppose que c'est la compétition entre cette dernière et la force de pression de radiation qui provoque les instabilités dynamiques dans le MOT.

Pour calculer analytiquement cette force on a recours à quelques approximations : on suppose que l'atome j ne reçoit des photons provenant que des 6 lasers et de l'atome i , c'est-à-dire que l'on néglige tous les photons diffusés par les autres atomes du MOT. C'est une simplification très hasardeuse, mais on ne sait pas calculer de manière simple le taux de photons diffusés par tout le nuage. De plus on suppose que l'intensité des lasers est très grande devant celle émise par l'atome i .

Le taux de photons diffusés total sur l'atome j est : $\Gamma_{tot} = \frac{\Gamma}{2} \frac{s_{tot}}{1 + s_{tot}}$

La part du taux de photons diffusés uniquement par l'atome i sur l'atome j est une pondération du résultat précédent :

$$\Gamma_{ij} = \Gamma_{tot} \frac{s_{ij}}{s_{tot} + s_{ij}}$$

Soit \vec{F}_{ij} la force exercée par l'atome i sur l'atome j :

$$\vec{F}_{ij} = \hbar \vec{k}_{ij} \frac{\Gamma}{2} \frac{s_{tot}}{1 + s_{tot}} \frac{s_{ij}}{s_{tot} + s_{ij}}$$

On a supposé que $I_{tot} \gg I_{ij}$ donc on peut négliger s_{ij} devant s_{tot} au dénominateur.

On a donc :

$$\vec{F}_{ij} = \hbar \vec{k}_{ij} \frac{\Gamma}{2} \frac{s_{ij}}{1 + s_{tot}}$$

$$\text{avec } s_{ij} = \frac{I_{ij} / I_{sat}}{1 + 4 \left(\frac{\delta_L}{\Gamma} - \frac{\vec{k}_{ij}}{\Gamma} \vec{v}_i - \frac{\mu}{\Gamma} \nabla B \cdot \vec{r}_i \right)^2}$$

$s_{tot} = \frac{I_{totale}}{I_{sat}}$, I_{totale} étant la somme des intensités des 6 lasers du MOT.

Il reste à calculer le terme I_{ij} . On sait que la puissance diffusée par l'atome i est due à la contribution des 6 lasers du MOT. L'intensité des lasers vue par un atome dépend bien sûr de sa position dans le nuage, d'où :

$$P_{diff}(x, y, z) = \sum_{m=1}^6 I_m(x, y, z) \frac{\sigma_0}{1 + 4 \left(\frac{\delta_L}{\Gamma} - \frac{\vec{k}_m}{\Gamma} \vec{v}_i - \frac{\mu}{\Gamma} \nabla B \cdot \vec{r}_i \right)^2}$$

σ_0 est la section efficace de diffusion égale ici à $\frac{3\lambda^2}{2\pi}$

$I(x, y, z)$ est calculée par la loi de Beer-Lambert :

$$I(x, y, z) = I_{inc} \cdot e^{-b(x, y, z)}$$

On a maintenant :

$$I_{ij} = \frac{P_{diff}}{4\pi r_{ij}^2}$$

Donc on peut mettre la force \vec{F}_{ij} sous la forme :

$$\vec{F}_{ij} = \frac{G}{r_{ij}^2} \vec{u}_{ij}$$

Avec G fonction de tous les paramètres évoqués ci-dessus. On démontre donc que cette force est une force de répulsion coulombienne, elle peut s'exercer à longue portée, d'où son rôle central dans les instabilités.

III Modèle Numérique

1 Le programme

On veut simuler le comportement d'un nuage de particule dans un MOT. Pour cela on va écrire la loi de la dynamique microscopique pour chaque atome et faire évoluer le système dans le temps.

Il est évidemment illusoire de faire évoluer 10^{10} particules comme dans la réalité. On va seulement décomposer le système en 100 à 1000 « macro » atomes, chaque « macro » atome représentant environ 10^7 atomes. Il faut donc appliquer un modèle microscopique à un système mésoscopique d'où un étalonnage des forces, en particulier dans la force d'interaction.

La forme du nuage initiale est générée par un tirage aléatoire qui produit un nuage à distribution gaussienne en positions et vitesses. On suppose que le nombre d'atomes reste constant au cours du temps.

Le noyau du programme est la partie où l'on calcul par chaque (« macro ») atome :

- Ecrantage de l'intensité des lasers.
- Force de pression de radiation moyenne.
- Fluctuation autour de cette force.
- Force de répulsion.

Le but de ce programme est de reproduire les oscillations que l'on observe expérimentalement. On pourra ainsi mieux comprendre leur origine et élaborer une théorie.

1.1 Détermination des grandeurs du programme.

Pour chaque particule on a les variables suivantes :

- $\{x,y,z\}$ les coordonnées spatiales.
- $\{v_x, v_y, v_z\}$ les coordonnées dans l'espace des vitesses.

Le temps est quantifié par le programme, le pas de temps dt est déterminé par l'utilisateur. On prend la μs comme unité de pas de temps.

Les forces sont exprimé est exprimée en Newton.

Les paramètres que l'on souhaite réglable par l'utilisateur sont :

- $s = \frac{I}{I_{sat}}$ le paramètre de saturation avec $I_{sat} = 1,6 \text{ mW cm}^{-2}$
- δ_L le désaccord du laser.
- ∇B_z le gradient de champ magnétique.
- b l'épaisseur optique.

- Le pas de temps.

On prendra les valeurs suivantes pour les constantes :

$$\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ kg } \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ avec } \lambda = 780 \text{ nm}.$$

$$\Gamma = 2\pi \cdot 5,9 \cdot 10^6 \text{ Hz} \text{ et } \mu = 2\pi \cdot 10^6 \text{ Hz } \cdot \text{G}^{-1}.$$

$$m_{Rd} = 85 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}.$$

1.1.1 Conversion des unités.

On va expliciter numériquement toutes les constantes et détailler les unités utilisées.

- On pose $v_{rec} = \frac{\hbar k}{m_{Rd}} = \frac{1,05 \cdot 10^{-34} \text{ kg } \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \frac{2\pi}{780 \text{ nm}}}{85 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 0,005984 \text{ m } \cdot \text{s}^{-1}$

- Pendant le temps dt, la vitesse de la particule est modifiée de dv, telque :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\vec{F}}{m_{Rd}}$$

on explicite donc $\frac{\hbar k}{m_{Rd}} \frac{\Gamma}{2} = v_{rec} \frac{\Gamma}{2} = 0,005984 \text{ m } \cdot \text{s}^{-1} \cdot \frac{2\pi \cdot 5,9 \cdot 10^6 \text{ Hz}}{2} = 110925 \text{ m } \cdot \text{s}^{-2}.$

On note cette constante $echv = 0,110925 \cdot 10^6 \text{ m } \cdot \text{s}^{-2}$ facteur d'échelle Force/vitesse.

On a ainsi la vitesse qui vaut : $\partial v = \partial t * echv * (\text{terme sans dimension})$. La vitesse est donc en $\mu\text{s} * 10^6 \text{ m } \cdot \text{s}^{-2} = \text{m } \cdot \text{s}^{-1}$.

- Il faut de même définir un facteur d'échelle temps/position :

$$\partial \vec{r} = \partial t * echt * \vec{v}$$

On note le facteur d'échelle temps/position $echt = 1 \cdot 10^{-6}$.

La position en $\mu\text{s} * 10^{-6} * \text{m } \cdot \text{s}^{-1} = \text{m}$.

- On définit 'delta' telque $\delta_L = \text{delta} * \Gamma$.

delta est le désaccord en unité Γ .

- On définit $kvgam = \frac{k}{\Gamma} = 0,21 \text{ s } \cdot \text{m}^{-1}$.

- On définit $mux = \frac{\mu}{\Gamma} = \frac{2\pi \cdot 1,4 \cdot 10^6 \text{ Hz } \cdot \text{G}^{-1}}{2\pi \cdot 5,9 \cdot 10^6 \text{ Hz}} = 0,237288 \text{ G}^{-1}$.

On définit mu gradient du champ magnétique en $\text{G } \cdot \text{m}^{-1}$.

En résumé

- Le programme donne les positions en μm et les vitesses en μm_s^{-1} .
- Le temps est en μs .
- Il faut rentrer delta en unité Γ , mu en $\mu\text{m} = \nabla B$ en G_m^{-1} , s est sans dimension.

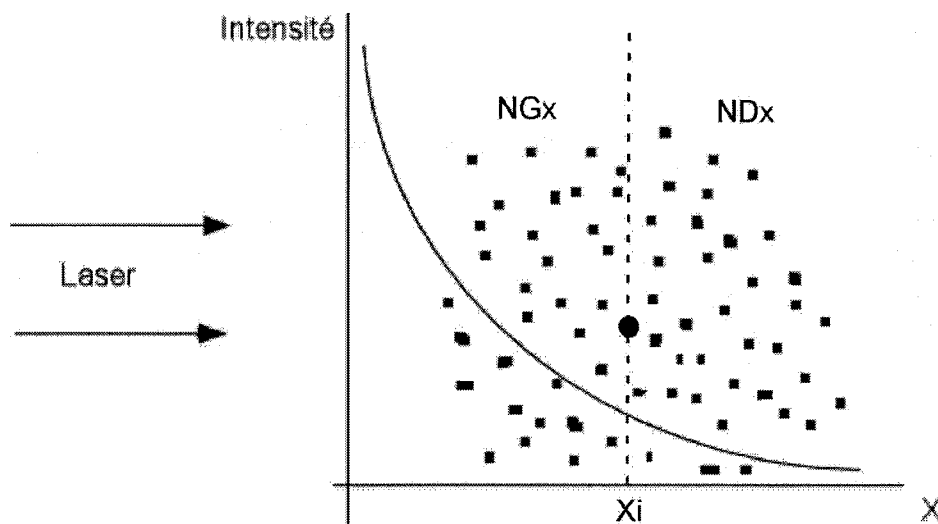
1.1.2 Simulation de l'écrantage.

Le programme compte combien de particules entourent la particule i dans chaque direction de l'espace.

Par exemple si on note $I = \frac{I_{inc}}{I_{sat}}$ donné par l'utilisateur, suivant le nombre de particules N_{Gx} qui sont à gauche selon x de la particule i , I venant du laser de gauche devient :

$$I_{Gx} = I.e^{-N_{Gx}b}$$

avec b l'épaisseur optique.



Ce principe même est répété pour les 3 directions pour les 6 lasers.

1.1.3 Algorithme de calcul de la force de pression de radiation.

On a ainsi les équations des positions et des vitesses des particules décrites par :

$$\partial v_x = \partial t * echv * \left(\frac{I_{Dx}}{1 + 4(\text{delta} - kvgam * v - mux * mu * x)^2 + sat} - \frac{I_{Gx}}{1 + 4(\text{delta} + kvgam * v + mux * mu * x)^2 + sat} \right)$$

(sat est la somme des intensité des laser dans toutes les directions)

$$v_x = v_x + \partial v_x$$

et

$$\partial x = \partial t * echv * v_x$$

$$x = x + \partial x$$

Rq1 : les autres forces que l'on verra par la suite seront implémentées de la même manière, c'est-à-dire sur la vitesse.

Rq2: Le programme renvoie également la température, il s'agit en fait

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=N} v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

Pour remonter à la température il faut se servir de $\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$

1.2 Simulation du bruit de diffusion.

on modélise le bruit sur la vitesse par une variation fonction de la racine du temps :

$$\partial v = \partial t * \text{force moyenne de radiation} + \sqrt{\partial t * (\text{bruit})}.$$

Le bruit est donné par $v_{rec} * \partial t * (\sum \text{lorentzienne})$, v_{rec} traduisant la variation d'impulsion de pas $\hbar k$ de manière isotrope.

On vérifie que les unités reste cohérente entre elles, les deux termes étant en $m \cdot s^{-1}$.

1.3 Simulation de la diffusion multiple.

On se limite à la diffusion double et on écrit la force \vec{F}_{ij} comme on a vu dans la partie théorique. Il reste à priori à lui ajouter un coefficient multiplicatif pour compenser le faible nombre d'atomes.

2 Test du modèle Doppler

On va ici tester si le programme valide les éléments de base du modèle Doppler. En particulier, on va déterminer les coefficient de friction et de rappel, et tester si le l'ajout du bruit simule bien la limite de refroidissement Doppler. Dans cette partie on n'active pas la force de répulsion.

2.1 Test du refroidissement par laser, détermination de γ

Les simulations qui suivent ont été faites avec 1 atome, sans gradient de champ magnétique, et avec le paramètre de saturation réglé à 0,01.

On fait varier le désaccord.

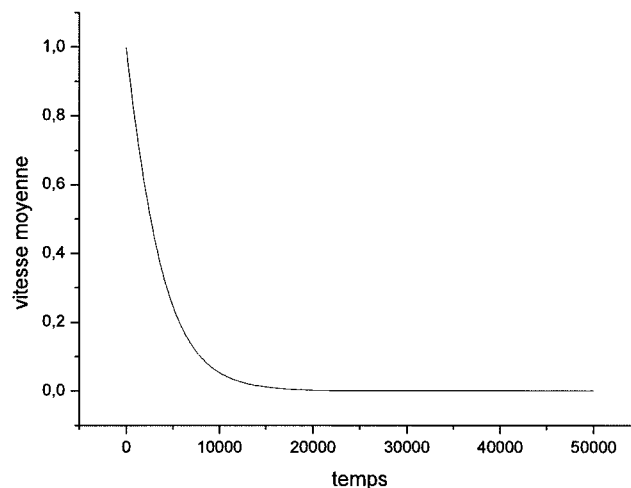
Dans ces conditions, en faisant un développement limité de la force autour de $\vec{v} = 0$, la loi régissant la vitesse est :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\gamma \cdot \vec{v}$$

$$\text{avec } \gamma = 8 \cdot v_{rec} \cdot \frac{|\delta_L|}{\Gamma} \cdot \frac{s}{\left(1 + \left(\frac{2\delta_L}{\Gamma}\right)^2\right)^2}$$

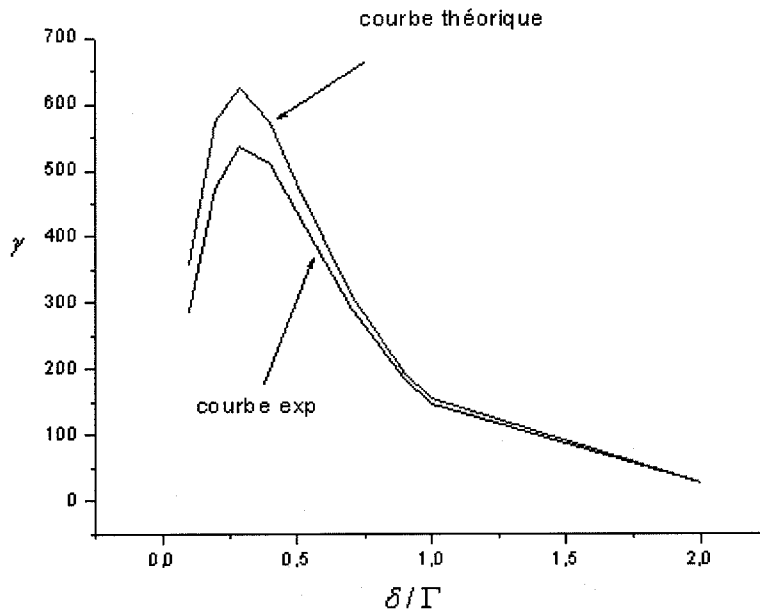
La solution de l'équation sur la composante x est donc du type : $v_x = v_{x0} \cdot e^{-\gamma \cdot t}$

Voici un exemple de simulation :



On détermine γ en fitant la courbe avec une exponentielle décroissante. L'échelle de temps étant en μs , γ est en μs^{-1} .

On obtient de cette manière la courbe de la friction en fonction du désaccord.



En accord avec la théorie, on vérifie qu'il existe un maximum de γ pour $\delta_L = \frac{\Gamma}{2\sqrt{3}}$ donc pour $\delta = 0,2886$.

On a en théorie $\gamma_{\max} = \frac{9}{4\sqrt{3}} \frac{\hbar k^2}{m_{Rd}} \cdot s = 626 \text{ } s^{-1}$.

Ici on doit multiplier la valeur donnée par la programme par le facteur d'échelle *echt* défini précédemment. On trouve $\gamma_{\text{simu}} = 0,00053 * 1E6 = 523 \text{ } s^{-1}$.

Les variations et l'ordre de grandeur sur γ sont bien reproduits.

2.2 Détermination de la pulsation critique de l'oscillateur amorti.

Les conditions sont les même que précédemment, sauf que l'on applique un gradient de champ magnétique. On fixe le paramètre $\mu=1000$, ce qui veut dire que l'on a un gradient de champ de $10 \text{ } G \text{ } cm^{-1}$.

On peut linéariser la force appliquée à l'atome, ce qui fait apparaître un nouveau terme:

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = -\gamma \cdot \vec{v} - \kappa \cdot \vec{r}$$

avec $\kappa = 8.v_{rec} \cdot \frac{|\delta_L|}{\Gamma} \mu \cdot \nabla B \cdot \frac{s}{\left(1 + \left(\frac{2\delta_L}{\Gamma}\right)^2\right)^2}$.

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique amorti

Posons $Q = \frac{\sqrt{\kappa}}{\gamma}$, appelé facteur de qualité du système, $p = \frac{\kappa}{\gamma}$, et $m = \frac{1}{2Q}$.

En fonction de Q on distingue 3 régimes :

- $Q < 1/2$, régime sur amorti.

La solution est :

$$z(t) = \frac{1 + \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}}{2} \cdot e^{-2m^2pt + 2m\sqrt{1-m^2}t} + \frac{1 - \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}}{2} \cdot e^{-2m^2pt - 2m\sqrt{1-m^2}t}$$

- $Q > 1/2$, régime sous amorti.

La solution est :

$$z(t) = \frac{\cos(2mp\sqrt{1-m^2}t + \phi)}{\cos(\phi)} \cdot e^{-2m^2pt}$$

$$\tan(\phi) = \frac{-m}{\sqrt{1-m^2}}$$

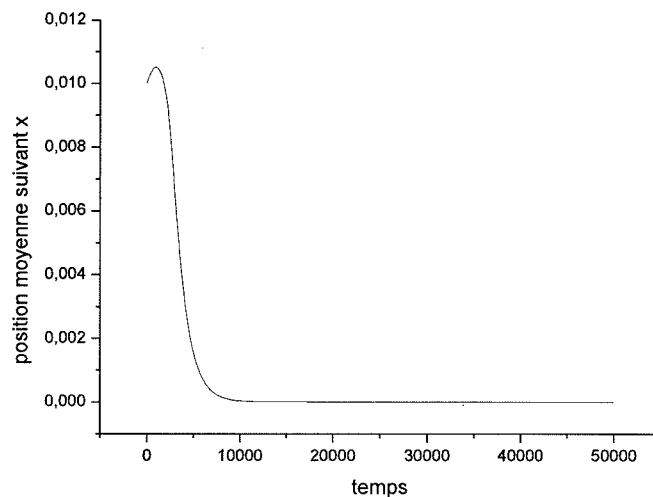
- $Q = 1/2$, régime critique.

La solution est :

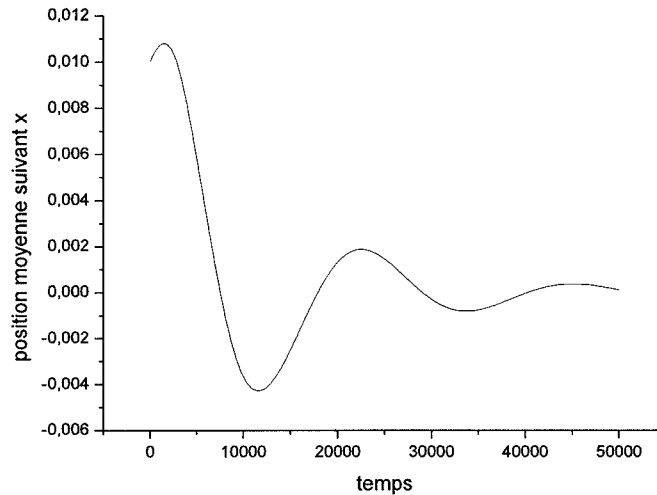
$$z(t) = Z_0 \cdot e^{-2pt}$$

On cherche les valeurs de s et δ_L pour que l'on se trouve en régime critique. Pour ce faire on lâche à $t=0$ un atome écarté de la position nulle, et on suit sa dynamique de relaxation.

Typiquement on a en régime sur amorti :



Et en régime sous amorti :



Le régime critique est obtenu lorsque la première oscillation (négative) de la figure précédente disparaît. On fixe par exemple $\delta=0,2886$ maximum de friction trouvé précédemment, et on fait varier s .

On trouve $s_{crit}=0,11$.

On en déduit une valeur de $\kappa = 7,41 \cdot 10^6 \text{ s}^{-2}$ à la transition.

Avec ces valeurs de δ et s , On trouve $Q=0,4$, ce résultat est correct car graphiquement on ne voit pas la différence avec les valeurs de δ et s qui donnent exactement $Q=0,5$.

En posant les bonnes constantes dans l'équation on a $m_{Rd} \cdot \omega_0^2 = \kappa$. Ici on a déjà pris en compte la masse dans la valeur de κ . Donc on trouve comme pulsation critique :

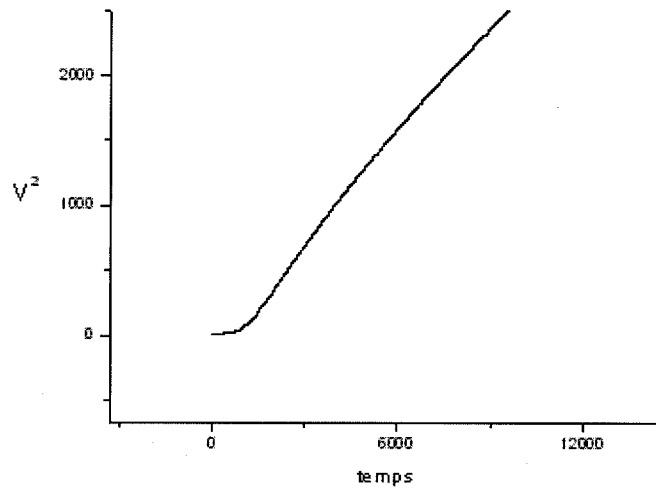
$$\omega_{0c} = 2723 \text{ s}^{-1}.$$

2.3 Coefficient de diffusion et vérification de la loi de température.

Le bruit agit sur la vitesse. Il simule la variation d'impulsion des atomes suite à une émission spontanée d'un photon à chaque cycle de fluorescence. On a l'équation suivante sur la variance de la vitesse :

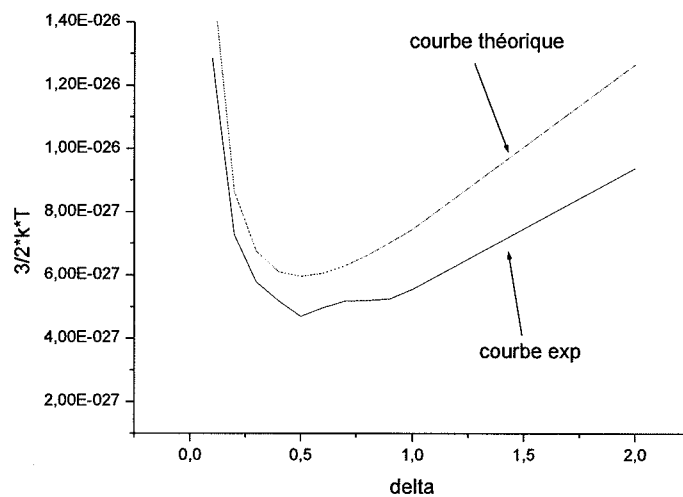
$$\frac{\partial(\Delta v)^2}{\partial t} = 2D$$

En supprimant la friction on vérifie que l'on a une croissance linéaire de la variance de la vitesse (il n'y a qu'un degré de liberté). Les simulations suivantes ont été réalisées avec 50 atomes :



On a effectivement un réchauffement, linéaire en racine du temps.

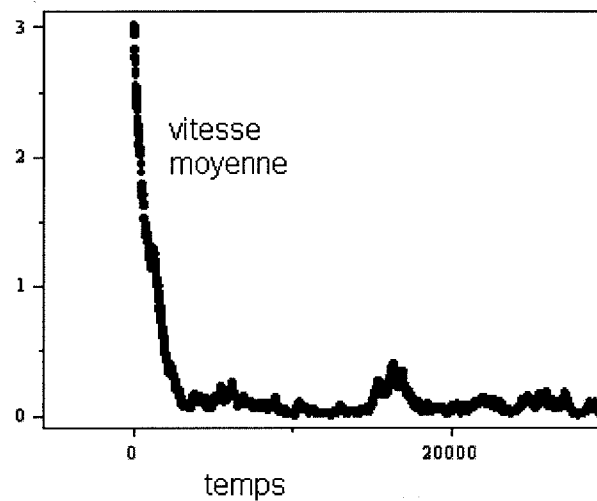
Voici la limite Doppler de la température, simulée pour différentes valeurs du désaccord.



L'écart en théorie et simulation est en moyenne de 20% ce qui est satisfaisant.

On observe bien un minimum de la température à $\frac{\Gamma}{2}$ qui correspond au compromis entre friction et diffusion.

On peut également faire le test avec 1 atome et voir si on trouve bien la température Doppler de la théorie qui est de $142 \mu K$ pour le Rubidium :

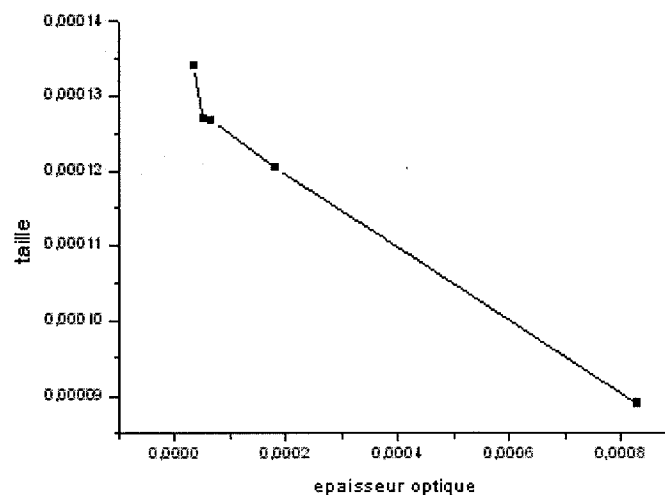


Les fluctuations dans le régime constant sont dues au bruit causé par l'émission spontanée. Pour plus de précision on moyenne pour $t > 10000$ et on trouve : $\langle v^2 \rangle = 0,0717 \text{ m s}^{-1}$, c'est-à-dire une température d'environ $130 \mu K$.

2.4 Compression du nuage en fonction de l'épaisseur optique.

IL faut vérifier que la simulation de l'écrantage donne de bons résultats. Il faut donc tester si en augmentant l'épaisseur optique du nuage, on a une compression de la taille du nuage (en l'absence de la force de répulsion)

L'épaisseur optique est calculée d'après la relation : $b = b_0 \frac{L_0}{L_{finale}}$, b_0 et L_0 sont entrés par l'utilisateur.



La force de répulsion n'étant pas activé, on observe la compression de la taille du nuage à mesure que l'épaisseur optique augmente.

Il est important de signaler que l'énergie cinétique totale reste constante en fonction de la variation de la taille. Donc d'après la conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\kappa\sigma_x^2$$

Si la taille diminue, il faut que la constante de rappel κ augmente.

3 Recherche des instabilités

Je présente ici les pistes sur lesquelles je suis parti :

- Détermination de la valeur numérique de G . D'après l'étude théorique on peut mettre G sous la forme (avec approximation) :

$$G \approx \hbar k \frac{\Gamma}{2} \frac{6}{\left(1 + 4 \frac{\delta^2}{\Gamma^2}\right)^2} \frac{I}{I_{sat}} \frac{\sigma_0}{4\pi} \frac{1}{1 + 6 \frac{I}{I_{sat}}}$$

On évalue G à $0.19 \cdot 10^{-34} \text{ N}$ (G calculé par le programme vaut également cette valeur).

On peut également déterminer $E_{int} = \frac{G}{r}$ l'énergie potentielle de l'interaction, avec r distance moyenne en les particules :

$$r = \frac{L}{\sqrt[3]{N}}$$

L étant la taille du nuage en régime stationnaire et N le nombre d'atomes.

- L'équipe « The Ion Trap Group » du département de physique et d'astronomie de l'université de Aarhus au Danemark étudie le piégeage d'ion dans un potentiel de coulomb. Ils ont déterminé (www.phys.au.dk/iontrapgroup/) que la phase d'un plasma était gouvernée par le rapport entre l'énergie potentielle coulombienne et l'énergie cinétique moyenne par particule.

Ils ont montré que si $\frac{E_{int}}{E_C} \approx 170$ alors les simulations de dynamique moléculaire montre une transition de phase liquide-cristal.

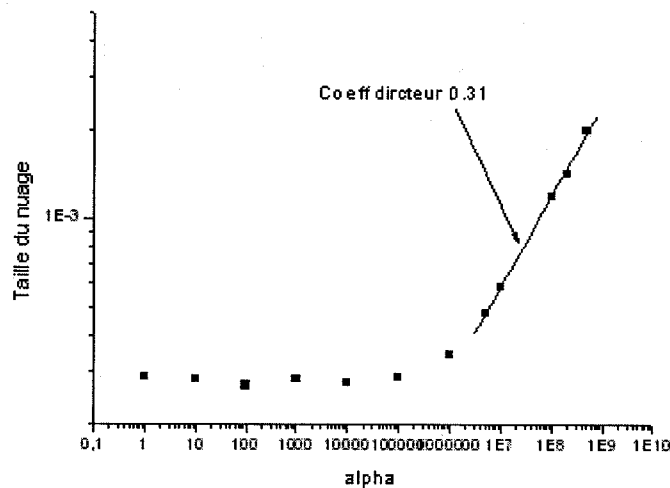
Dans notre cas on peut également évaluer cette grandeur puisqu'on a un potentiel de coulomb :

$$\frac{E_{int}}{E_C} = \frac{G/r}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{0,6 \cdot 10^{-31}}{0,28 \cdot 10^{-25}} = 0,2 \cdot 10^{-7}$$

en prenant $v^2=0,4$ m/s, la masse d'un atome de Rubidium, $L=1$ mm et $N= 30$ atomes.

En considérant le modèle de l'équipe danoise, on est en phase liquide. Par contre on peut observer la transition liquide-cristal en ajoutant un coefficient à G. Il serait également intéressant de mesurer cette grandeur expérimentalement pour savoir dans quelle phase on se trouve.

- On en vient justement au scaling « alpha » à mettre devant la force de répulsion. Il faut vérifier le modèle Wieman qui prédit que la taille du nuage augmente en puissance 1/3 avec l'intensité de la force de répulsion. Comme on le voit on a une gamme de paramètre alpha où la loi est vérifiée :



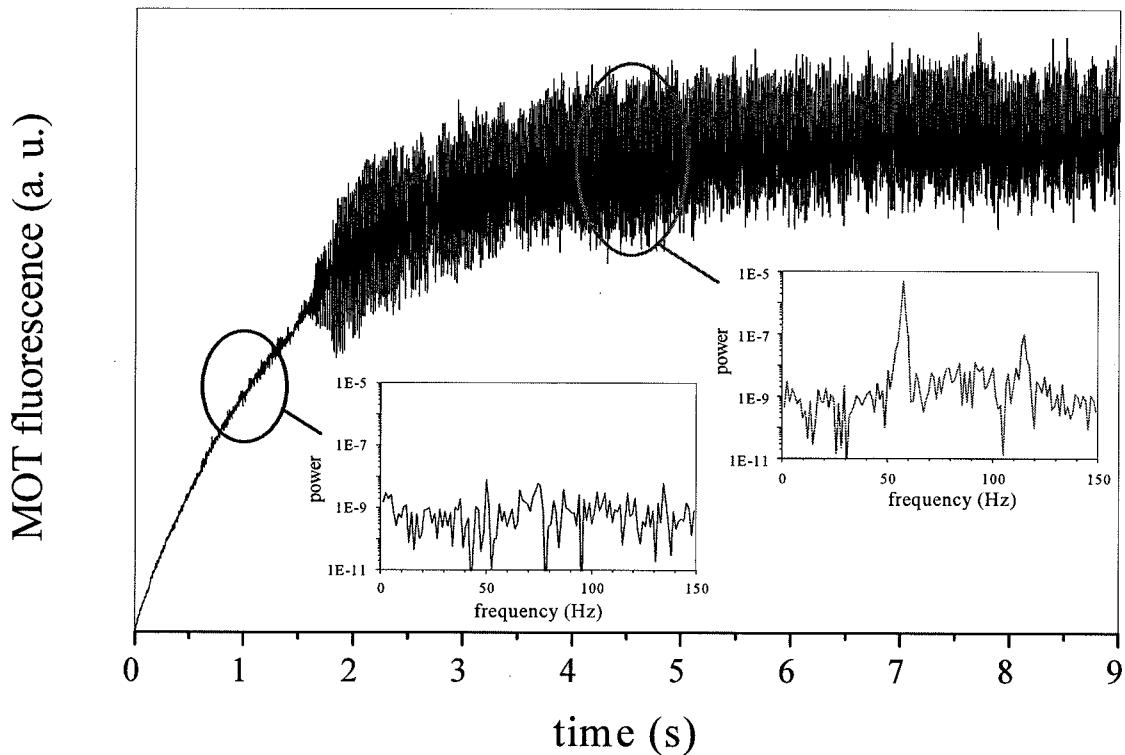
(echelle log-log)

La fourchette de valeur que peut prendre alpha va de 5^E6 à 1^E9 , au-delà la taille du nuage explose car la force de répulsion devient trop grande.

3 Caractérisation de la nature des instabilités

3.1 Caractérisation des oscillations : nature spectrale

Avant de faire une étude détaillée des oscillations, voici un exemple typique du passage de l'état stable à instable :



Cette courbe est obtenue en coupant le laser repompeur, et en le rebranchant à $t = 0$. A partir de cet instant le MOT se remplit d'atomes provenant de la vapeur diluée présente dans la cellule.

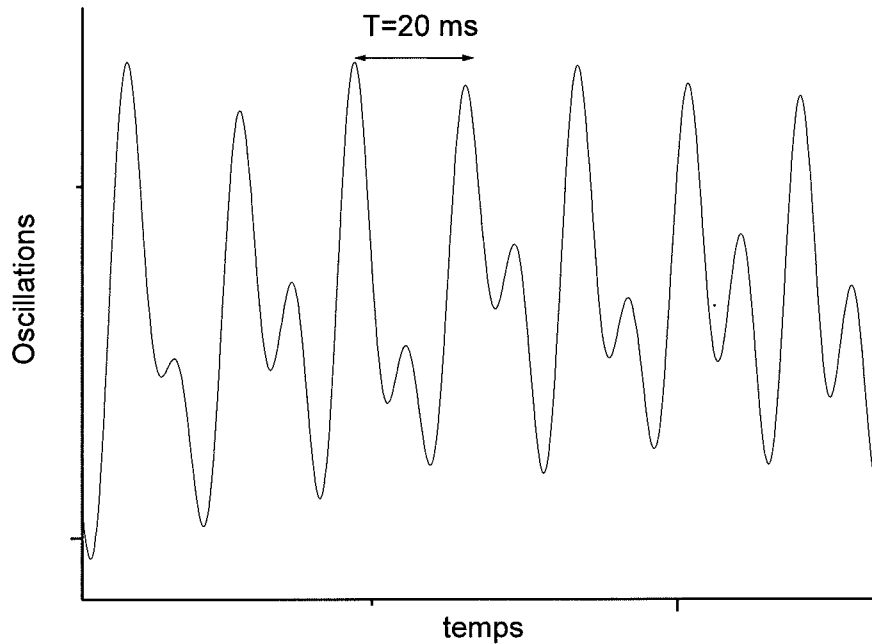
En effet, l'évolution du nombre d'atome est donnée par une loi du type :

$$\frac{\partial N}{\partial t} = cP - pPN$$

Le premier terme correspond au chargement du MOT et le second aux pertes occasionnées par les collisions avec le gaz chaud.

On a donc une loi de croissance exponentielle du nombre d'atome. On a réglé au préalable le désaccord du laser à une valeur où le nuage oscille en régime stationnaire. Le nombre d'atomes est donc un critère d'instabilité.

Revenons justement à la nature de ses oscillations. Voici un exemple de la forme temporelle des oscillations observée :



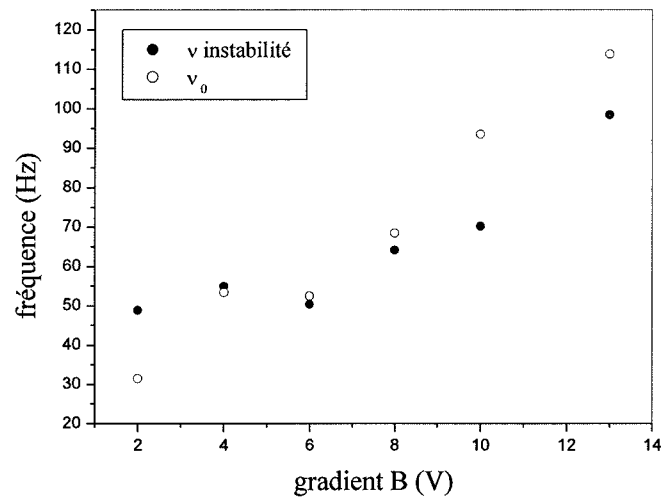
Typiquement, suivant le gradient de champ magnétique appliqué, la fréquence des oscillations varie entre 50 Hz et plus de 100 Hz. La fréquence augmente lorsque le champ magnétique est plus fort.

De plus, la nature des oscillations a une très forte dépendance envers l'alignement des faisceaux pièges. Pour réaliser de bonnes mesures, il faut veiller à optimiser l'alignement du piège pour obtenir une oscillation la plus monochromatique possible.

3.2 Seuil d'oscillation.

On vient de voir que le nombre d'atomes est un critère pour passer du régime stable au régime instable. Mais il existe d'autres paramètres : en particulier le désaccord du laser et le gradient de champ magnétique appliqué.

Le seuil des instabilités est fonction de ces 3 paramètres. En pratique on fixe 2 paramètres et on fait varier le troisième. On verra que le paramètre le plus simple à faire varier, et également celui donnant de meilleurs résultats, est le désaccord.



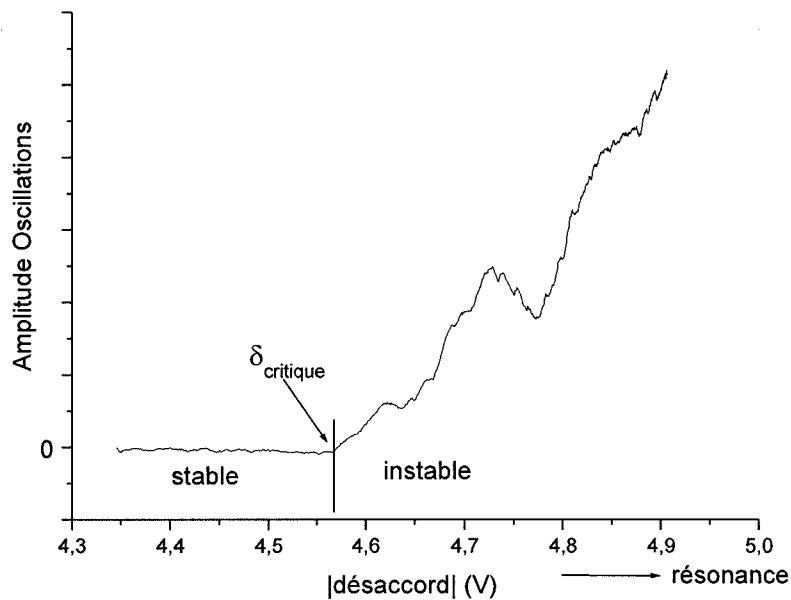
Cette observation devra en particulier être reproduite par la simulation numérique.

4 Cartographie du seuil d'oscillation.

4.1 Méthode de détermination du seuil.

Connaissant la bande de fréquence propre aux oscillations, on va procéder par filtrage de Fourier. Voici la méthode systématique que nous avons employé pour déterminer le seuil :

- Pour une valeur gradient de champ magnétique donnée, on génère une rampe sur le désaccord du laser de telle manière que le nuage passe continûment du régime stable au régime instable.
- On acquiert le signal de fluorescence issue d'une fraction du MOT (typiquement $\frac{1}{4}$).
- On divise ce signal par sa valeur moyenne pour obtenir la valeur normalisée des fluctuations.
- On applique un passe bande autour de la fréquence d'oscillation (que l'on connaît après avoir fait au préalable une TF du signal brut). On coupe ainsi le bruit de toutes les autres fréquences parasites.
- On prend la valeur absolue du signal, puis on détecte son enveloppe. Le résultat est une courbe proportionnelle à l'amplitude des oscillations, donc voici un exemple :

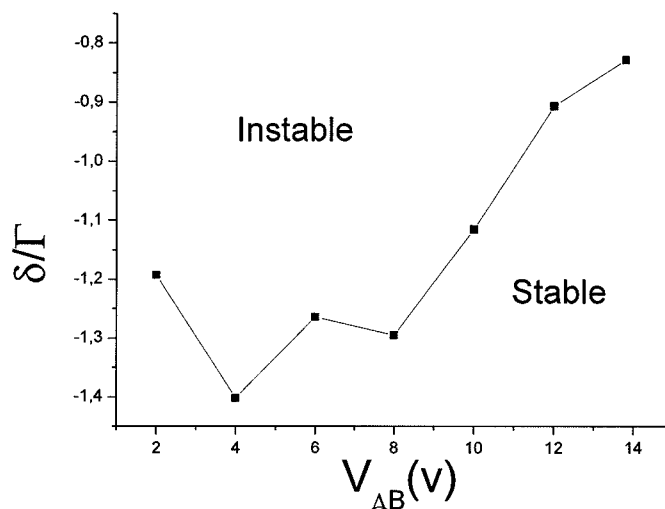


(Le désaccord en unité Γ est donné par $\delta/\Gamma = 2.16 * [\text{désaccord}(V) - 5.2]$)

L'avantage de cette méthode est qu'elle est objective (on ne détermine pas le seuil à l'œil quand on voit le piège osciller), et elle offre un bon rapport signal sur bruit.

4.2 Evolution du seuil en fonction du désaccord et du champ B.

Pour différent gradient de champ magnétique, on fait varier le désaccord du laser, ce qui permet de dresser carte suivante :



4.3 Evolution des paramètres caractéristiques du MOT sur la courbe du seuil.

Dans cette partie on va déterminer si le nombre d'atomes est constant quand le MOT oscille. On va également étudier comment varie le nombre d'atomes, la taille du nuage et l'épaisseur optique quand on se déplace sur la courbe du seuil.

4.3.1 Fluctuation du nombre d'atomes

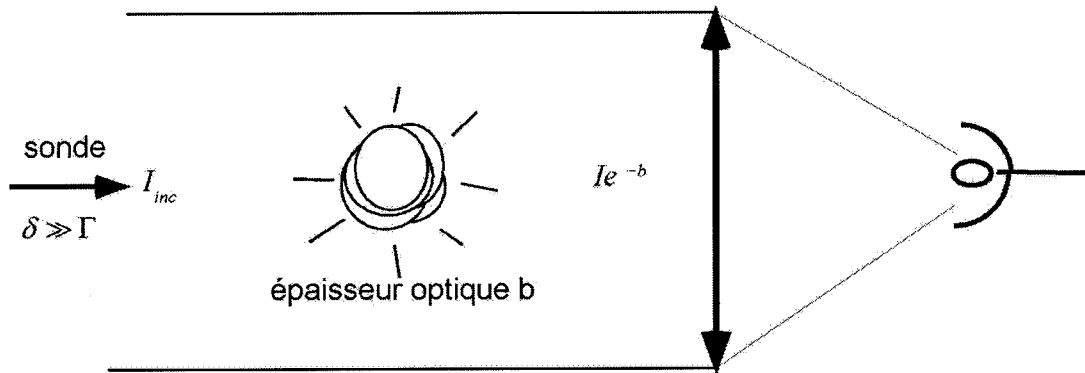
On veut quantifier les fluctuations et le nombre d'atomes dans le MOT en régime stable et instable.

Il y a deux méthodes pour mesurer le nombre d'atomes :

- Mesure de la fluorescence du nuage. Le nombre d'atome effectif dans le piège est calculé en supposant qu'il est proportionnel au produit signal de fluorescence par section efficace, soit :

$$N_{at} \propto Fluo * \left(1 + 4 \frac{\delta^2}{\Gamma^2}\right)$$

- Une autre méthode est de dire que le nombre d'atome est proportionnel 1 moins la transmission du nuage, si l'épaisseur optique de ce dernier est $\ll 1$. Pour ce faire on utilise la sonde (très désaccordée, pour satisfaire la condition épaisseur optique petite) après avoir coupé les lasers du piège et le champ magnétique :



En effet, raisonnons à 2 dimensions :

$$T = \frac{\int I \cdot dx \cdot e^{-\sigma \int n(x,z) \cdot dz}}{\int I \cdot dx}$$

A faible épaisseur optique $e^{-b} \approx 1 - b$, donc :

$$T \approx 1 - \sigma \cdot \frac{\iint n(x,z) \cdot dx \cdot dz}{\int I \cdot dx}$$

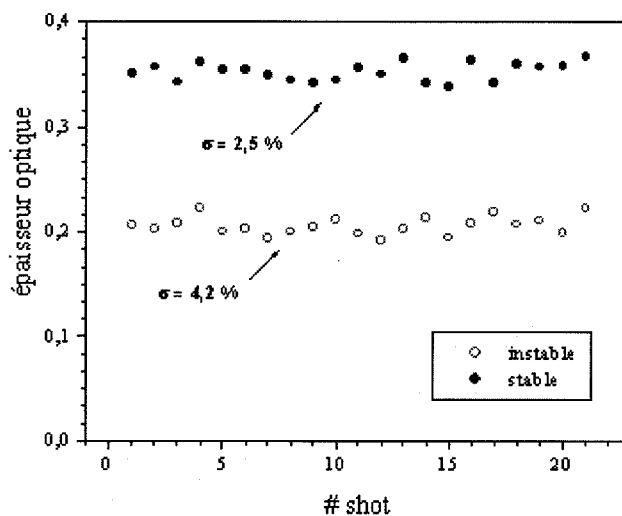
avec

$$\iint n(x,z) \cdot dx \cdot dz = N$$

donc

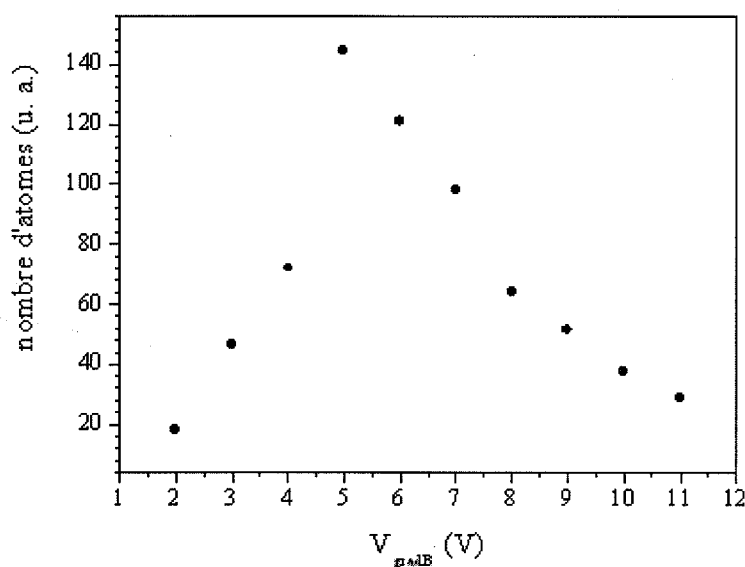
$$1 - T \propto N$$

On acquiert de cette manière la transmission, à partir de laquelle on déduit l'épaisseur optique. On fait quelque relevé en régime stable et instable, ce qui permet de tracer la courbe suivante :



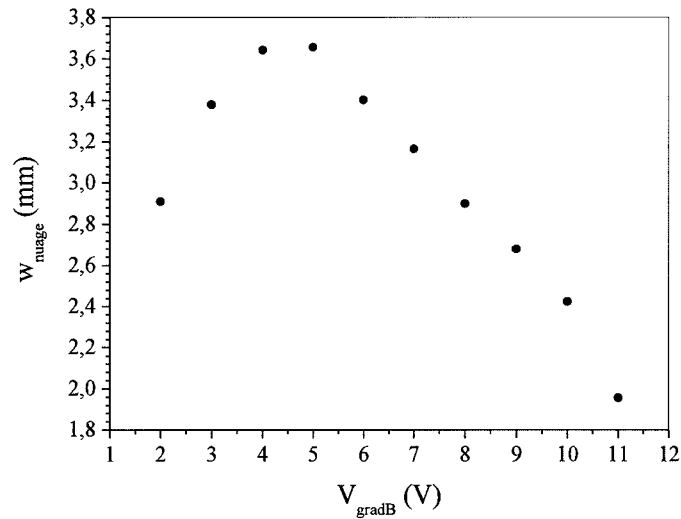
On peut conclure que les variations en régime stable, comme en régime instable, du nombre d'atome est faible (les variations relatives un peu plus importantes en régimes instable peuvent être attribué à une taille trop petite du faisceau sonde). On peut donc dire avec une bonne approximation que le nombre d'atome est quasi constant au cours du temps. Dans le même temps on valide ce que l'on a postuler pour le modèle numérique, ce qui est bien sûr fondamental .

On va maintenant faire une mesure quantitative du nombre d'atome lorsque l'on se déplace le long de la courbe du seuil d'instabilité ($\delta, \nabla B$). D'une façon générale le nombre d'atome varie avec ∇B et δ car on change la plage de capture du MOT, comme le montre la courbe ci-dessous (mesures faites sur le signal de fluorescence) :



4.3.2 Taille du nuage

On a accès à la taille du nuage en intégrant en intensité les images prises avec la caméra refroidie. Comme précédemment on parcourt la courbe du seuil d'instabilité ($\delta, \nabla B$) :



Si on confronte ce graphique avec le précédent, on remarque que la taille est maximale lorsque l'on a le plus grand nombre d'atome dans le piège (typiquement pour un gradient de champ magnétique de 4 et 5 volts).

4.3.3 Evolution de l'épaisseur optique au seuil

Il faut revenir sur un résultat important de l'année 2003. Il était conclu que l'épaisseur optique du nuage « vue » par les faisceaux qui le piègent, était le paramètre pertinent des instabilités : les résultats préliminaires montraient qu'il existait un seuil absolu pour l'épaisseur optique (environ autour de 1) au seuil d'instabilité.

Par contre il y avait des problèmes : le seuil était mal contrôlé et l'épaisseur optique n'était pas mesurée directement.

5 Recherche d'un modèle non linéaire pour les instabilités.

Dans cette dernière partie on va tenter d'identifier la classe d'instabilité à laquelle on a affaire. En effet, de nombreux résultats existent désormais sur la physique des instabilités, grâce au développement des théories sur le chaos.

5.1 Présentation des systèmes dynamiques non linéaire.

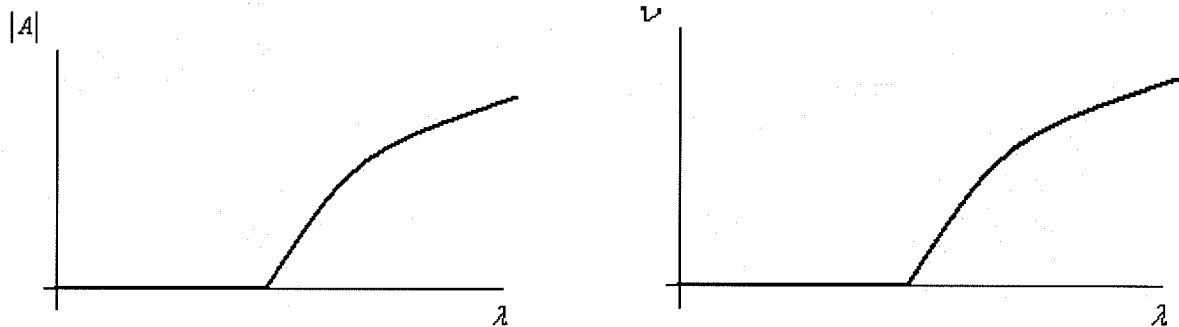
Les changements qualitatifs dans la structure de la dynamique d'un système sont appelés bifurcation. La valeur du paramètre où la bifurcation se produit est appelé point de bifurcation.

Scientifiquement, l'étude du type de bifurcation fournit les modèles des transitions et des instabilités. A chaque type de bifurcation est associé un (ou des) modèle(s) théorique(s).

D'un point de vue mathématique, il existe les bifurcations de Pitchfork, de Hopf sous-critique et super-critique, et des nouveaux systèmes qu'on appelle excitables.

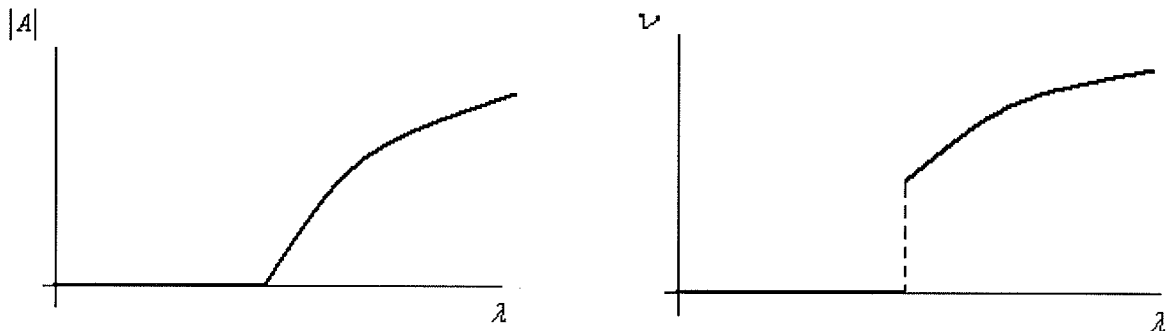
Chaque type de bifurcation a ses particularités : si on se restreint à l'amplitude A et la fréquence ν des oscillations qui sont les observables les plus pertinentes chez nous, il existe un paramètre d'ordre λ en fonction duquel on a :

- **Pitchfork :**



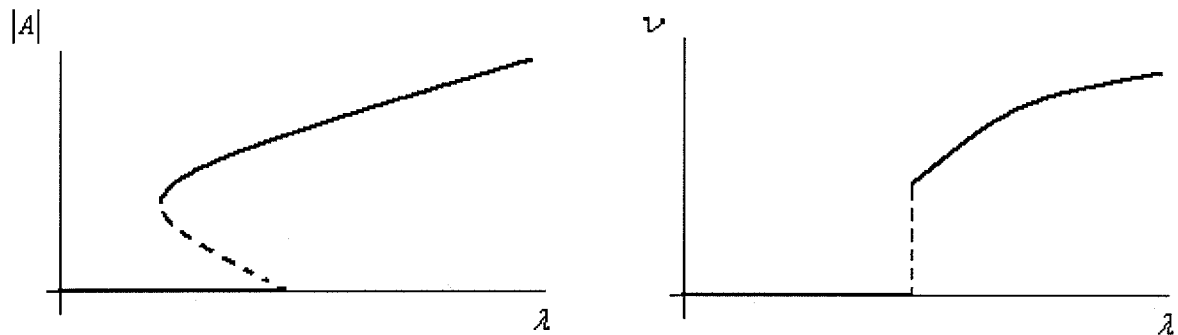
L'amplitude et la fréquence d'oscillation sont continues à la bifurcation

- **Hopf super-critique :**



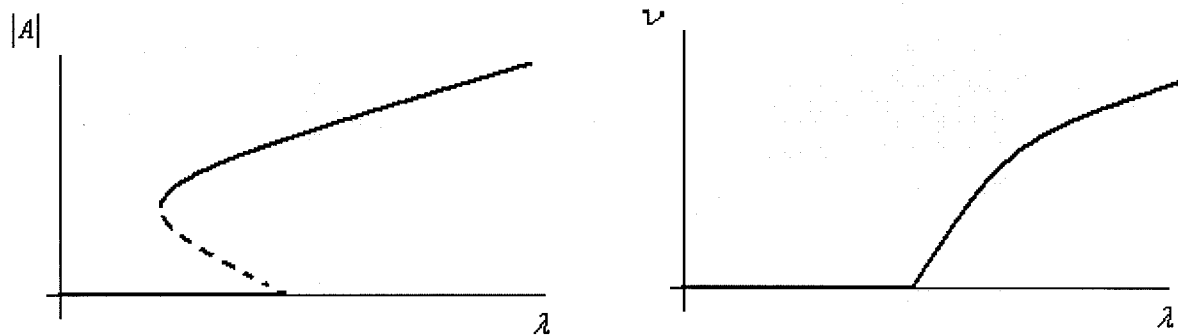
L'amplitude est continue, mais la fréquence d'oscillation prend une valeur non nulle à la bifurcation.

- **Hopf sous-critique :**



Il y a une hystérésis sur l'amplitude, la fréquence d'oscillation est discontinue à la bifurcation.

- **Système excitable :**

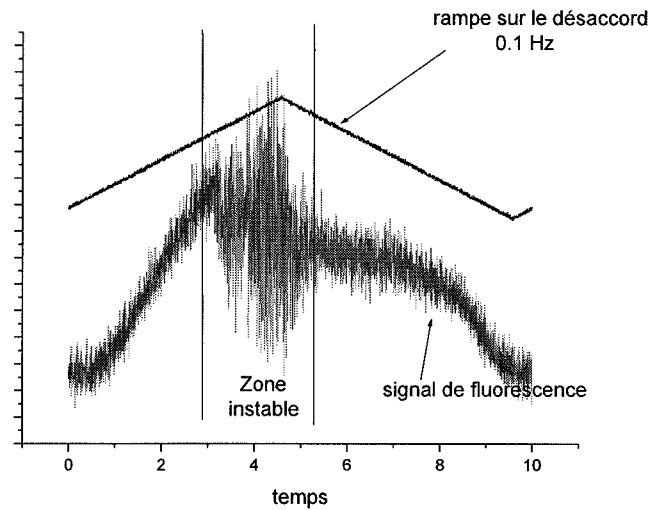


Le système excitable se caractérise également par le fait que l'on peut faire un accrochage en fréquence en modulant le paramètre d'ordre : la fréquence d'oscillation du système va suivre la fréquence de modulation.

5.2 Orientation vers un modèle.

5.2.1 Hystérésis

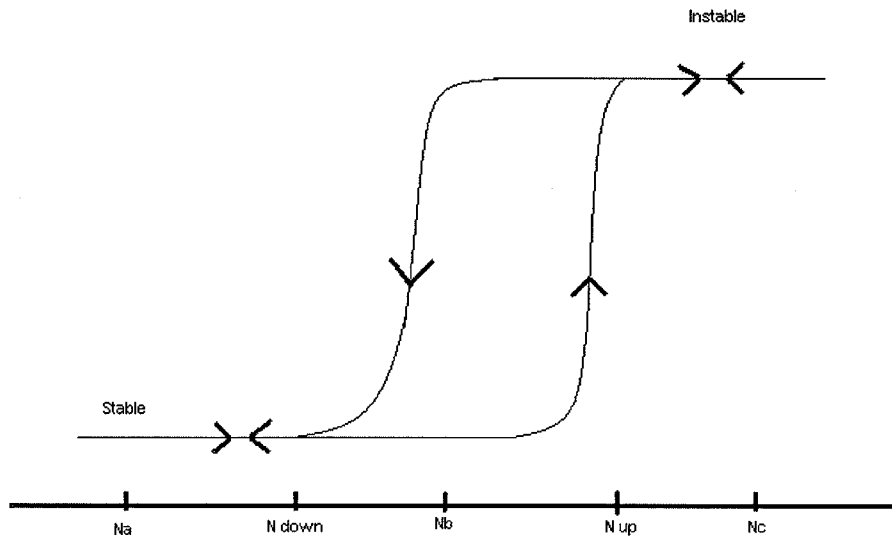
On cherche à montrer l'existence ou non d'un effet d'hystérésis au franchissement du seuil. On génère une rampe sur le désaccord des faisceaux pièges de telle sorte que le désaccord passe continûment d'une valeur où le MOT est stable à une valeur où il oscille. Pour évaluer la valeur du désaccord au seuil d'oscillation, on observe le signal de fluorescence partiel du nuage :



Il reste à déterminer les valeurs du désaccord au seuil sur la rampe montante et descendante, et cela pour différent gradient de champ magnétique.

Typiquement lors des premières mesures, on obtenait des résultats comme ci-dessus, en prenant 0.1 Hz comme fréquence de rampe. Il est clair que l'on voit l'existence d'hystérésis sur le nombre d'atome.

On en déduit le diagramme suivant :



On peut maintenant vérifier à changeant à la main le désaccord pour confirmer cette hystérésis. On change le désaccord de façon à passer de $Na \rightarrow Nb \rightarrow Nc \rightarrow Nb \rightarrow Na$.

Si on observe :

Na →	Nb →	Nc →	Nb →	Na →
Stable	Stable	Instable	Instable	Stable

alors il y a de l'hystérésis.

Sinon :

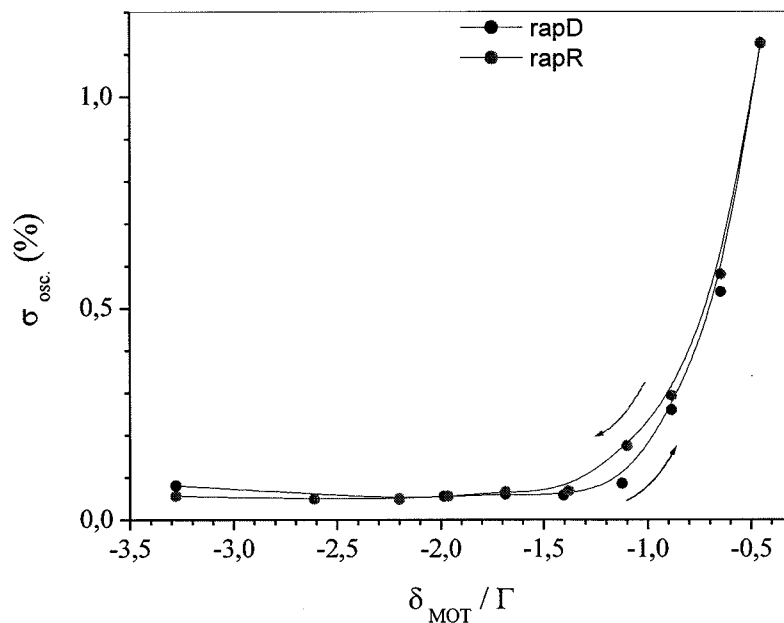
Na →	Nb →	Nc →	Nb →	Na →
Stable	Stable	Instable	Stable	Stable

Alors il n'y a pas d'hystérésis.

Après plusieurs essais, on confirme que l'on se trouve dans le second cas, c'est-à-dire que l'on ne voit pas d'hystérésis, et ce pour différent gradient de champ magnétique. Alors pourquoi est ce contradictoire avec la première observation ?

L'explication vient du fait de la fréquence de la rampe : en effet le balayage à 0.1 Hz est trop rapide car le temps de chargement du piège est de l'ordre de la seconde, il faut donc balayer plus lentement. On prendra 0.01 Hz pour les autres mesures.

La différence est assez évidente car elle confirme que l'on ne voit pas d'hystérésis, aux erreurs de détermination près (il faut en particulier corriger. Dans tous les cas des mesures faites en faisant varier le désaccord « à la main » vont dans ce sens :

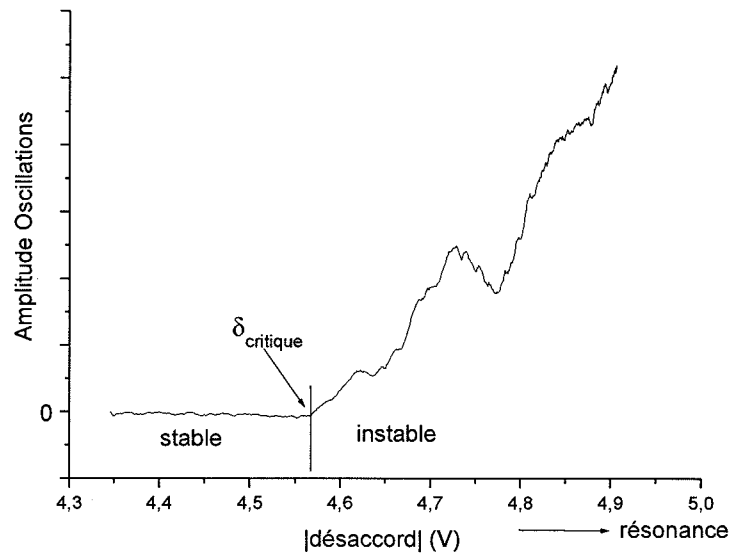


La marge d'erreur sur la détermination du seuil ne nous permet pas de conclure positivement sur la présence d'hystérésis. L'absence apparente d'hystérésis nous oriente donc vers une instabilité de type Pitchfork ou Hopf super-critique.

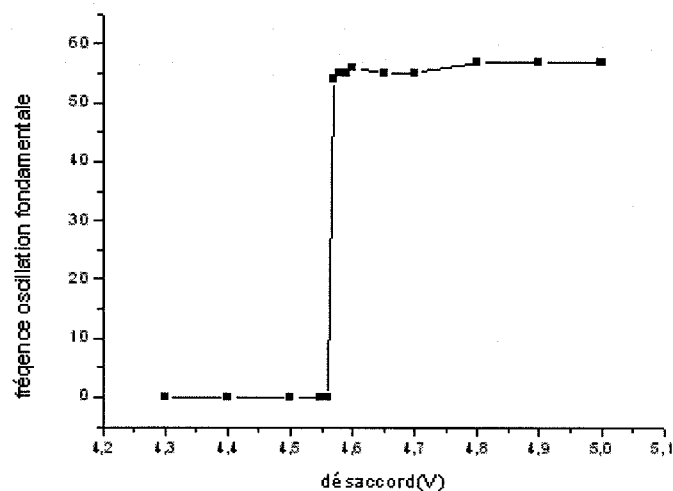
5.2.2 Amplitude et fréquences des oscillations.

La détermination de l'amplitude des oscillations est exposée dans la partie 4.1. Il reste à trouver le paramètre d'ordre λ qui donne le meilleur résultat.

C'est le désaccord que l'on choisit, on a un graphique de bifurcation:



De plus la fréquence d'oscillation présente une discontinuité au seuil (passage de 0 Hz à 55 Hz) :



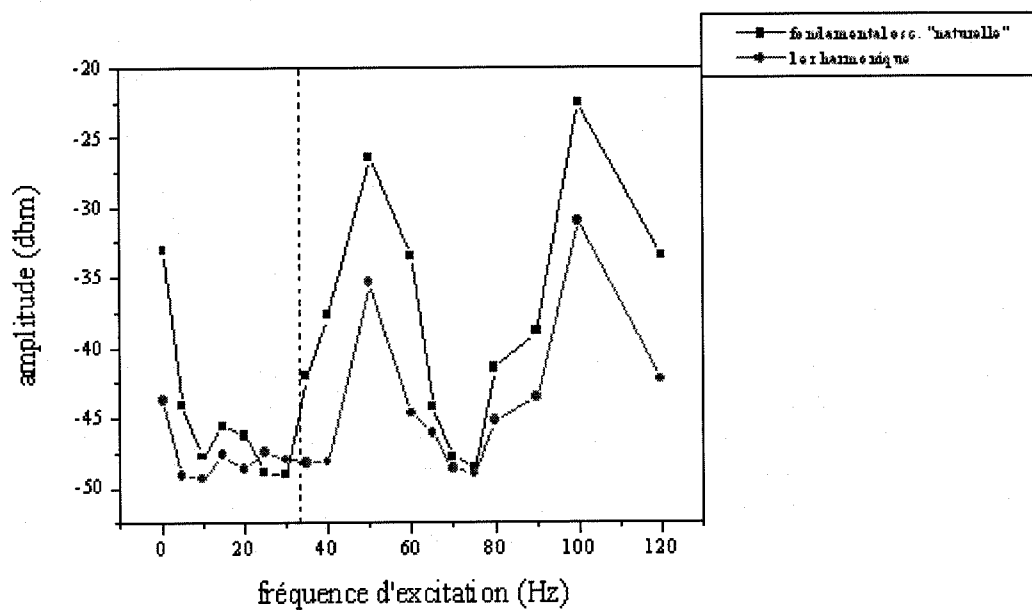
Comme on a vu qu'il n'y avait pas d'hystérésis, on s'oriente donc vers le modèle d'une bifurcation de **hopf super-critique**.

5.2.3 Accrochage en fréquence.

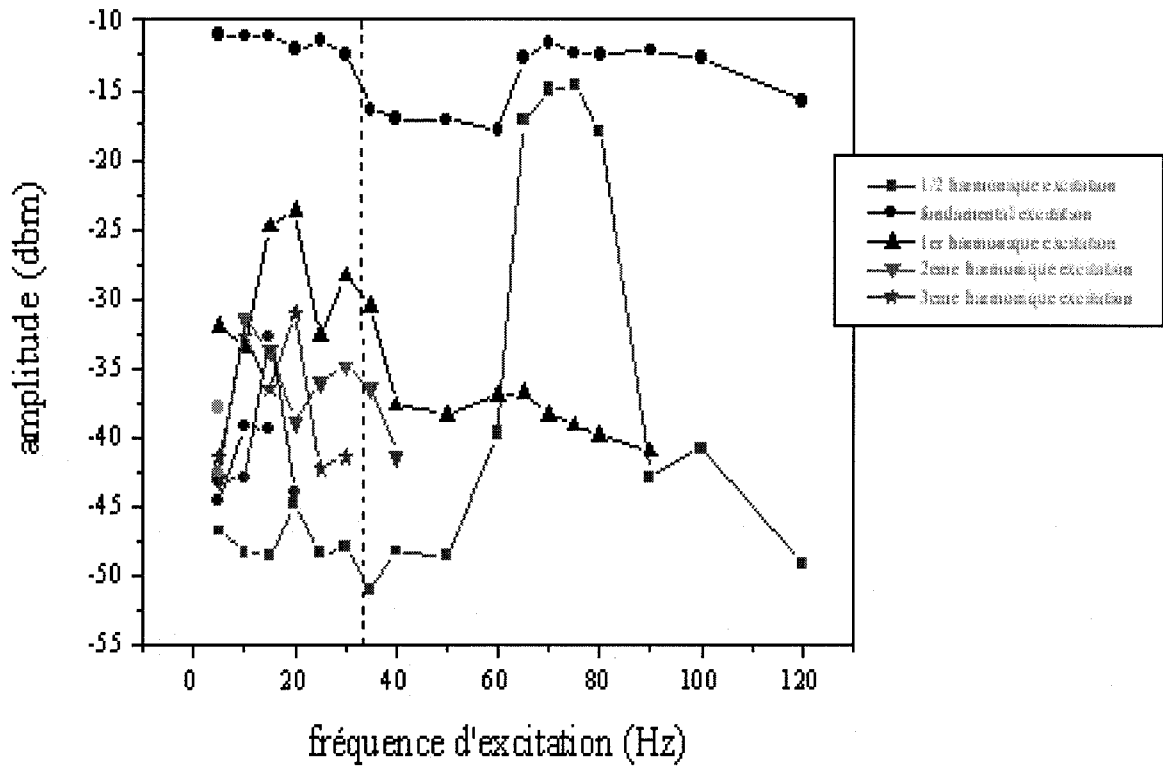
On cherche à tester s'il le système peut présenter un accrochage en fréquence. Pour ce faire, on module la valeur du désaccord à la fréquence ν_0 et on se place à une valeur du désaccord près du seuil d'instabilité : le piège oscille à la fréquence ν .

On part de ν_0 supérieur au moins à deux fois ν , puis on diminue ν_0 tout en suivant l'évolution du ou des pics d'oscillation du piège. Dans cette expérience, on cherche à voir si la fréquence d'oscillation ν suit la fréquence d'excitation ν_0 , lorsque celle-ci est proche.

Lorsque nous avons réalisé l'expérience l'oscillation naturelle du piège possédait son harmonique fondamental à 33 Hz et un premier harmonique à 66 Hz. On va suivre leur amplitude en fonction de la fréquence d'excitation.

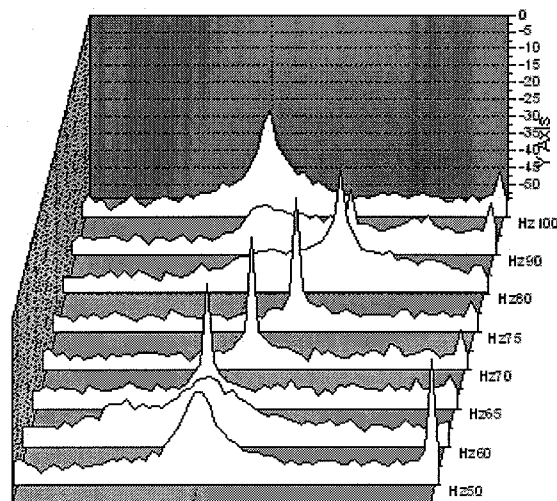


On constate qu'il y a deux plages de fréquence où on perd la puissance du fondamentale et du premier harmonique de l'oscillation naturelle. Il faut maintenant savoir où cette puissance est transférée :



On constate que la puissance est perdue par le fondamental et le premier harmonique de l'oscillation naturelle lorsque l'excitation vaut 70 Hz, et elle est au profit du $\frac{1}{2}$ harmonique de l'excitation, qui remplace la fréquence d'oscillation naturelle.

Pour expliquer cela plus simplement, on a un accrochage en fréquence lorsque l'on excite au double de la fréquence d'oscillation naturelle. On peut suivre l'évolution de cet accrochage sur le graphique suivant :



On voit ici que le pic assez large de l'oscillation naturelle qui se transforme et qui est remplacé quelque temps par le $\frac{1}{2}$ harmonique de l'excitation, puis se décroche et redevient plus large.

C'est un phénomène déjà connu en physique des lasers et qui atteste que l'on est face à une dynamique non linéaire. Par contre on ne peut pas conclure qu'il s'agisse d'un système excitable car en théorie les systèmes excitables possèdent de l'hystérésis dans leur dynamique. Ce sera donc un point à approfondir, et il faudra en particulier faire le rapprochement avec modèles existants en physique des lasers.

5.2.4 Résumé

Les principaux résultats de cette partie sont les suivants :

- L'espace des phases des paramètres du système possède au moins 2 dimensions.
- La bifurcation est continue en amplitude et discontinue en fréquence et on ne voit pas d'hystérésis. Elle a donc les propriétés d'une bifurcation de Hopf super-critique.
- Le système présente un accrochage en fréquence lorsqu'on l'excite au double de sa fréquence d'oscillation naturelle.

V Conclusion

L'étude des instabilités dynamiques dans un MOT nous laisse entrevoir une dynamique complexe. Du point de vue expérimental, les techniques de mesures ont été améliorées, l'expérimentation nous donne des résultats importants pour pouvoir aborder le problème de façon théorique. En premier lieu, le fait que le nombre d'atomes reste constant pendant toute la dynamique est fondamental, puisqu'il s'agit d'une hypothèse essentielle à la simulation numérique. De même, après avoir été validée dans le cadre du modèle Doppler, la simulation numérique aura pour perspective de reproduire les observations expérimentales de la dynamique du MOT en régime instable. Les ingrédients que l'on suppose clé (écranage des faisceaux laser et diffusion double) sont maintenant implémentés, il faut poursuivre sur le plan théorique de la physique non linéaire.

Pour ma part ce stage m'a fait découvrir le monde des atomes froids. D'un point de vue théorique j'ai beaucoup appris sur les interactions onde-matière et la part expérimentale a été importante puisque j'ai appris à me servir d'un piège magnéto-optique. Ce stage au sein d'une équipe du CNRS aura également été d'un grand apport culturel sur le monde de la recherche.

Bibliographie

- Guillaume Labeyrie, thèse de doctorat, Deux outils pour l'optique atomique : Jet intense d'hélium métastable et miroir à onde évanescente exalté (1998)
- Nathalie Vansteenkiste, thèse de doctorat, Réalisation d'un laser LNA monomode et asservi et utilisation pour quelque expériences de refroidissement radiatif d'atome. D'hélium métastable. (1989)
- Steven H Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos.

